

Le coniche secondo **JOHN WALLIS**

a cura di Fabio Martinelli



Ritratto ad opera di Gottfried Kneller

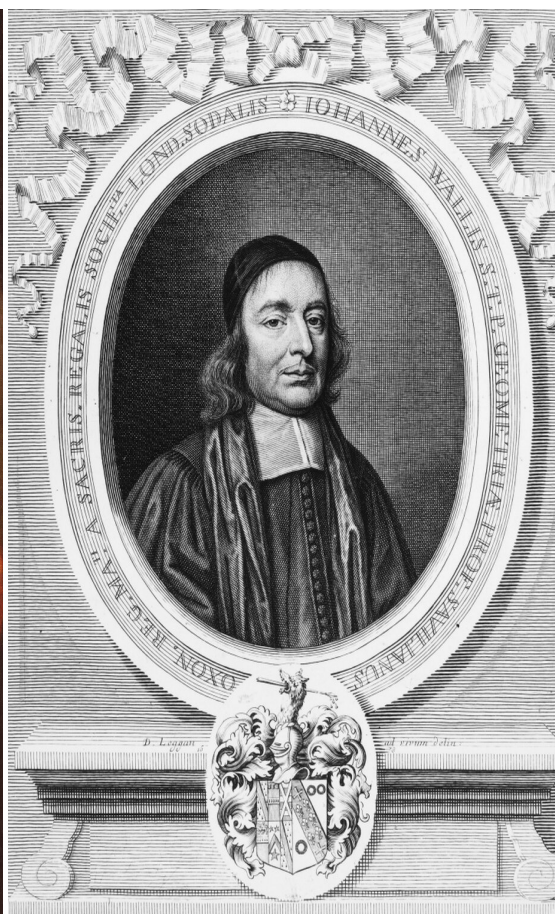


Immagine tratta dalle opere di Wallis

Biografia

1616	Nasce ad Ashford, nel Kent
1632-40	Studia all'Emmanuel College di Cambridge
1640	Prende i voti come sacerdote
1642	Inizia a decifrare crittogrammi per la fazione Parlamentare
1647	Studia <i>Clavis Mathematicae</i> di Oughtred
1649	Nominato <i>Savilian Professor of Geometry</i> all'Università di Oxford
1655	Pubblicazione del <i>De sectionibus conicis</i>
1656	Pubblicazione di <i>Arithmetica Infinitorum</i> e di <i>Opera Mathematica, Volumen secundum</i>
1658	Nominato Archivista dell'Università di Oxford
1665-79	Dispute con Thomas Hobbes
1685	Pubblicazione del <i>Treatise of Algebra</i>
1695	Pubblicazione di <i>Opera Mathematica, Volumen primum</i>
1698	Pubblicazione di <i>Opera Mathematica, Volumen tertium</i>
1703	Muore ad Oxford

John Wallis nacque il 23 novembre 1616 ad Ashford, nel Kent, e morì il 28 ottobre 1703 ad Oxford. Contribuì in modo sostanziale alle origini del calcolo e fu il matematico inglese più influente prima di Newton, suo contemporaneo ed estimatore. Fu studente di William Oughtred, al quale rivolse delle dediche all'inizio delle sue opere, e tra gli studenti più noti di Wallis si ricorda William Brouncker.

Wallis fu il terzo di cinque figli. Suo padre fu il reverendo John Wallis, che studiò al Trinity College di Cambridge e dopo aver preso i voti come sacerdote divenne ministro di Ashford a partire dal 1603; morì nel 1622, quando John aveva appena 6 anni. Sua madre fu Joanna Chapman, seconda moglie del reverendo Wallis, che sposò nel 1612; morì nel 1643.

Wallis iniziò la scuola ad Ashford, sua città natale, ma un'epidemia di peste nella zona portò sua madre a decidere di trasferirlo a Tenterden nel 1625, dove frequentò la scuola di grammatica di James Movat e qui mostrò per la prima volta il suo grande potenziale come studioso.

Trascorse il 1631-32 alla scuola di Martin Holbeach a Felsted, dove divenne esperto di latino, greco ed ebraico. Qui studiò anche logica, ma la matematica al tempo non era considerata importante come materia accademica, era vista come una disciplina meccanica, utile per l'attività di mercanti, marinai, falegnami e simili; quindi Wallis non entrò in contatto con la matematica a scuola. Fu durante le vacanze di Natale del 1631 che la conobbe per la prima volta, quando suo fratello gli insegnò le regole dell'aritmetica. Wallis scoprì di essere interessato all'argomento e cominciò a studiarlo come autodidatta, leggendo dei libri che trovava per caso dal momento che non aveva nessuno che lo guidasse nello studio.

Dalla scuola di Felsted andò all'Emmanual College di Cambridge, entrando intorno al Natale del 1632, al fine di conseguire il diploma standard di Bachelor of Arts e, poiché nessuno in quel momento poteva dirigere i suoi studi di matematica, scelse una serie di disciplina come etica, metafisica, geografia, astronomia, medicina e anatomia. Era previsto che sarebbe diventato un medico, anche se lui non aveva mai avuto intenzione di intraprendere una tale carriera. Nonostante ciò, nei suoi anni all'Emmanual College, fu il primo a difendere in un dibattito pubblico la rivoluzionaria teoria del suo maestro Francis Glisson sulla circolazione del sangue, e sembra che questa fu la prima occasione nella quale questa teoria è stata pubblicamente sostenuta.

Nel 1637 Wallis ricevette effettivamente il diploma in Bachelor of Arts e continuò i suoi studi conseguendo il Master nel 1640. Sempre nel 1640 fu ordinato sacerdote dal vescovo di Winchester e nominato cappellano di Sir Richard Darley a Butterworth, nello Yorkshire. Tra il 1642 e il 1644 fu cappellano a Hedingham, Essex ed a Londra. Fu durante questo periodo che ebbe luogo un evento che plasmò il futuro di Wallis:

“... una sera, a cena, arrivò una lettera cifrata, relativa alla cattura di Chichester il 27 dicembre 1642, che Wallis riuscì a decifrare in due ore. L'impresa ha fatto la sua fortuna. Divenne un adepto dell'arte crittologica, fino ad allora pressoché sconosciuta, e la esercitò per conto del partito parlamentare.” [Christoph J. Scriba, *The autobiography of John Wallis*, F.R.S., *Notes and Records Roy. Soc. London* 25 (1970).]

Questo è infatti il periodo della guerra civile inglese, tra Realisti e Parlamentari; Wallis si schierò dalla parte dei Parlamentari, probabilmente a causa dell'influenza che Holbeach ebbe su di lui quando frequentò la Felsted School, ed usò le sue abilità nella crittografia per decodificare i messaggi Realisti a favore dei Parlamentari.

All'epoca la crittografia non era sviluppata, nonostante i successi individuali di matematici come Viète, erano sconosciuti i principi alla base del processo di progettazione ed analisi dei cifrari. La maggior parte dei cifrari erano metodi ad hoc basati su un algoritmo segreto piuttosto che sistemi basati su una chiave variabile. Wallis da parte sua riteneva indistruttibili i cifrari basati su una chiave variabile ed era preoccupato del fatto che altre potenze straniere potessero farne uso (cosa che, ad esempio, lo porterà a rifiutare la richiesta di Leibniz, nel 1697, di insegnare la crittografia agli studenti di Hannover).

Grazie a questi suoi sforzi a beneficio dei Parlamentari, fu incaricato della chiesa di St Gabriel in Fenchurch Street (Londra) nel 1643.

Sempre nel 1643, sua madre morì, lasciando in eredità a Wallis una grande tenuta nel Kent.

Nel 1644 Wallis divenne segretario del clero a Westminster e grazie a ciò ottenne un incarico al Queen's College di Cambridge. I suoi studi di teologia non durarono a lungo poiché il 14 marzo 1645 sposò Susanna Glyde (matrimonio dal quale nacquero due figlie), quindi non fu più in grado di tenere l'incarico dal momento che gli associati al College non potevano essere sposati. Tornò a Londra dove iniziò a incontrare settimanalmente un gruppo di scienziati interessati alle scienze naturali e sperimentali, gruppo che in seguito diventò la *Royal Society of London*.

Il secondo evento che plasmò la vita di Wallis fu strettamente associato agli inizi della Royal Society e quasi certamente derivante da quegli incontri: nel 1647 lesse il libro *Clavis Mathematicae* di Oughtred. Rapidamente il suo amore per la matematica, che aveva da studente ma che non aveva mai trovato l'opportunità di fiorire, venne completamente alla luce. Nella sua autobiografia scrisse che studiò approfonditamente il libro di Oughtred in un paio di settimane e continuò poi a produrre matematica per conto suo.

Wallis, tra l'altro, in questo periodo scoprì metodi per risolvere equazioni di quarto grado che erano simili a quelli scoperti da Harriot, ma affermò di non averlo plagiato, dicendo di essere venuto a conoscenza dei contributi di Harriot solo più tardi.

In seguito alla sconfitta dei Realisti ad Oxford, iniziò nel 1647 la cosiddetta “visita parla-

mentare di Oxford”, durante la quale molti professori furono deposti dalle loro cattedre. Nel 1649 Wallis fu nominato da Cromwell alla Savilian Chair of geometry (cattedra di geometria che prende il nome dal nome del suo istitutore, Sir Henry Savile) a Oxford, di certo questo accadde principalmente a causa del sostegno dato precedentemente ai Parlamentari, così come è certo che il precedente detentore della cattedra, Peter Turner, fu deposto a causa delle sue opinioni Realiste. Nonostante Wallis fosse il principale crittografo della nazione, non aveva una particolare reputazione come matematico; di contro, Cromwell teneva Wallis in grande considerazione, non solo per le sue opinioni politiche ma anche per la sua cultura. Wallis ricoprì la Savilian Chair per 54 anni, fino alla sua morte, e anche se non fu nominato per merito (ma appunto, per ragioni politiche), la sua nomina si rivelò ampiamente giustificata dal lavoro svolto.

Questa non fu l'unica posizione che Wallis ricoprì ad Oxford: nel 1657 fu nominato custode degli archivi dell'Università. Ci furono notevoli polemiche sulla sua elezione a questo incarico.

Aubrey scrisse nel suo *Lives of Eminent Men*:

“Nel 1657 si fece eleggere (con mezzi ingiusti) a Custos Archivorum dell'Università di Oxford [...] Ora, che il Savilian Professor ricopra anche un altro incarico, è così nettamente contrario ai principi di Sir Henry Savile che nulla può essere immaginato più contrario, e se lo si fa è decisamente spergiuro. Eppure è autorizzato a tenere anche l'altro posto.”

Gli oppositori di Wallis credevano infatti che fosse diventato il custode degli archivi dell'Università grazie al sostegno dato a Cromwell. Anche se così fosse, come per la Savilian Chair, Wallis svolse i suoi compiti molto bene e dimostrò a posteriori di essersi meritato pienamente l'incarico.

Sebbene Wallis fosse dalla parte dei Parlamentari, si espresse contro l'esecuzione di re Carlo I e, nel 1648, firmò un documento di opposizione all'esecuzione. Sembra che ciò sia stato fatto in buona fede, non per ottenere un qualche privilegio, ma tuttavia ebbe un guadagno firmando la petizione contro l'esecuzione del re: nel 1660, quando la monarchia fu restaurata e Carlo II salì al trono, il re confermò la nomina di Wallis alla Savilian Chair. Carlo II andò anche oltre perché nominò Wallis cappellano reale e, nel 1661, lo nominò membro di un comitato istituito per rivedere il libro delle preghiere.

Durante gli anni della sua vecchiaia, Wallis pubblicò gli ultimi due volumi del suo libro *Opera Mathematica*, rispettivamente *Opera Mathematica, volumen primum* nel 1695 ed *Opera Mathematica, volumen tertium* nel 1698 (mentre invece *Opera Mathematica, volumen secundum* era già stato pubblicato nel 1656) nei quali sono raccolte le sue maggiori opere. In *Opera Mathematica, volumen primum* compaiono i libri *De sectionibus conicis*, *nova methodo expositis* ed *Arithmetica infinitorum*, dei quali parleremo.

Thomas Hearne, nel suo *Remarks and Collections* (1705-1714), lo descrive così:

“... era un uomo per la maggior parte mirabile e dalla grande operosità, per cui in alcuni anni era diventato così noto per la sua profonda abilità in matematica che era meritatamente considerato la più grande persona in quella professione ai suoi tempi. Era anche un buon chierico e non un semplice critico in lingua greca e latina.”

Spaccato sugli interessi di Wallis in ambito matematico e sulle novità da lui introdotte

Wallis ha studiato le opere di Keplero, Cavalieri, Roberval, Torricelli e Descartes, per poi introdurre nuove idee che superano quelle degli autori appena citati.

E' stato lui ad introdurre, per la prima volta nel *De sectionibus conicis*, i simboli ∞ per indicare l'infinito e $\frac{1}{\infty}$ per indicare un infinitesimo. Ha introdotto anche la notazione usata al giorno d'oggi per potenze e radici, ad esempio

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Si attribuisce a lui anche il conio delle parole "momento", nell'ambito della fisica, "interpolazione" e "frazione continua".

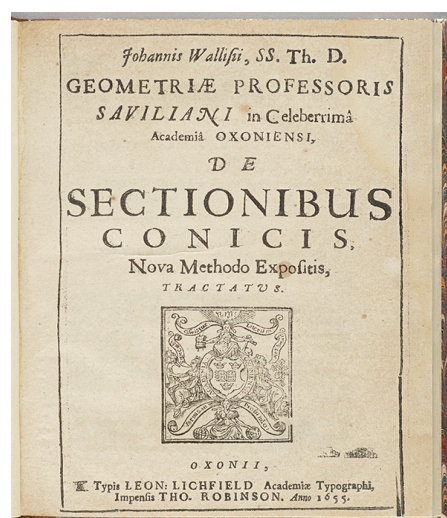
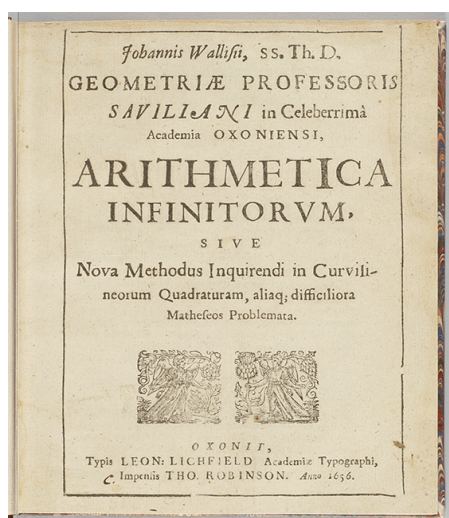
E' attribuita a lui l'idea della rappresentazione della retta reale con i numeri positivi e negativi raffigurati in direzioni opposte rispetto allo zero, nonostante rifiutasse l'idea che i numeri negativi fossero inferiori a zero (pensava che fossero qualcosa di più grande dell'infinito).

Le opere più famose di Wallis sono di certo *De sectionibus conicis, nova methodo expositis* del 1655 e *Arithmetica infinitorum* del 1656 (entrambe si possono trovare in un libro unico, *Opera Mathematica* del 1695, che non è altro che una raccolta delle opere di Wallis).

Uno dei risultati più notevoli contenuti in *Arithmetica infinitorum* è la formula

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots$$

che Huygens non ritenne valida fino a quando non fu dimostrato che portava ad approssimazioni numericamente corrette di π . Wallis scoprì questo risultato quando tentò di trovare l'area del quarto di cerchio di raggio unitario $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ (ovvero, come diremmo in termini moderni, mentre cercò di calcolarne l'integrale tra 0 ed 1). Risolse il problema dell'integrazione di $(1 - x^2)^n$ per potenze n intere, basandosi sul metodo degli indivisibili di Cavalieri, ma poiché non era in grado di trattare potenze frazionarie, usò l'*interpolazione*, parola che lui stesso introdusse per la prima volta in quest'opera. La



sua interpolazione utilizzava il concetto di continuità di Keplero (secondo il quale ciò che succede nel finito, succede anche all'infinito, nel senso di un abbozzato passaggio al limite) e con esso scoprì metodi per valutare gli integrali che furono successivamente usati da Newton nel suo lavoro sul teorema binomiale. Un altro risultato notevole contenuto in quest'opera riguarda la formula di quadratura di Cavalieri, che in termini moderni scriviamo come

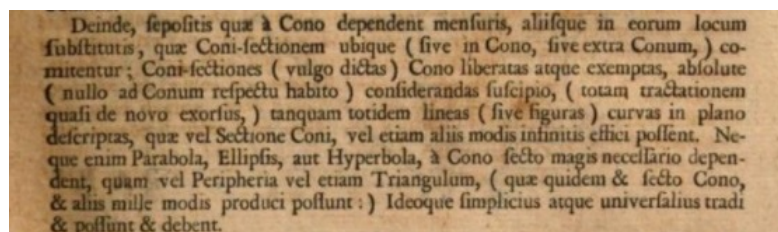
$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

per Cavalieri valeva per $n \geq 0$, Wallis la estese ad n negativi e frazionari.

La novità del *De sectionibus conicis, nova methodo expositis* sta invece nel fatto che Wallis descrive in questo scritto le coniche da un nuovo punto di vista, non più come sezioni create tagliando una superficie conica con un piano, ma usando le proprietà delle coordinate algebriche, ovvero descrivendole come luogo dei punti.

Nell'introduzione del *De sectionibus conicis* troviamo:

"[...] non è più necessario [...] considerare la parabola come una sezione di un cono da un piano parallelo ad un generatore. né considerare un cerchio come una sezione di un cono da un piano parallelo alla base, né un triangolo come un piano attraverso il vertice."



Ritaglio dell'introduzione del *De sectionibus conicis*.

Wallis sviluppò dei metodi nello stile della trattazione analitica di Descartes e fu il primo matematico inglese ad utilizzare queste nuove tecniche. Fu anche un importante storico della matematica e nel suo *Treatise on Algebra* del 1685 fornì una grande quantità di prezioso materiale storico. Tuttavia la caratteristica più importante di questo lavoro è che ha portato ai matematici il lavoro di Harriot in una chiara esposizione, presentata per la prima volta da qualcuno che ha veramente capito il significato dei suoi contributi.

In *Treatise on Algebra* Wallis accetta radici negative e radici complesse. Mostra che $a^3 - 7a = 6$ ha esattamente tre radici e sono tutte reali. Critica anche la regola dei segni di Descartes affermando, abbastanza correttamente, che la regola che determina il numero di radici positive e il numero di radici negative tramite il suo test, è valida solo se tutte le radici dell'equazione sono reali.

Una sezione altamente controversa di questo lavoro è quella in cui Wallis afferma che la conoscenza dell'algebra di Descartes è stata acquisita direttamente da Harriot. Wallis ha ricevuto critiche per queste affermazioni già dal momento in cui il libro è stato pubblicato, ma l'argomento è ancora oggi di interesse per gli storici della matematica. Le affermazioni fatte da Wallis su questo argomento non sono mai state mostrate false con piena soddisfazione di tutti. C'è solo un accenno al fatto che potrebbe esserci del vero nelle sue affermazioni, e ciò mantiene viva la discussione.

Wallis ha dato altri contributi alla storia della matematica restaurando e traducendo alcuni testi greci antichi come le *Armoniche* di Tolomeo, il *Sulle grandezze e distanze del sole e della luna* di Aristarco e il *Calcolo delle sabbie* di Archimede.

Wallis mostrò interesse anche per la fisica. Per quanto riguarda l'astronomia, nel 1655 pubblicò *Eclipsis solaris observatio, Oxonii habita. 2 Aug. 1654. St. vet.* riguardante, appunto, un'eclissi solare osservata in prima persona. Inoltre nel 1668 fu proposta da parte della Royal Society la teoria della collisione dei corpi come argomento di dibattito. Wallis, Christopher Wren e Christian Huygens inviarono soluzioni al problema che erano simili e corrette, tutte dipendenti da quella che ora è nota come *conservazione della quantità di moto*; ma, mentre Wren e Huygens limitarono la loro teoria a corpi perfettamente elastici, Wallis considerò anche urti anelastici. Seguirono nel 1669 un lavoro sulla statica (sui centri di gravità) e nel 1670 uno sulla dinamica.

Wallis fu coinvolto in un'aspra disputa con Hobbes, il quale era molto al di sotto del livello di Wallis per quanto concerne la matematica. Nel 1655 Hobbes affermò di aver scoperto un metodo per quadrare il cerchio. Il libro di Wallis *Arithmetica infinitorum* con i suoi metodi era in stampa in quel momento e confutò le affermazioni di Hobbes. Hobbes rispose all'attacco di Wallis con il pamphlet (di carattere satirico-polemico) *Six lessons to the Professors of Mathematics at the Institute of Sir Henry Savile*.

Wallis rispose a sua volta con un altro pamphlet, *Due Correction for Mr Hobbes, or School Discipline for not saying his Lessons Aright*, al quale Hobbes rispose con il pamphlet *The Marks of the Absurd Geometry, Rural Language etc. of Doctor Wallis*.

Dopo un periodo in cui la controversia sembrò essere finita, la disputa si riaprì più e più volte, continuando per oltre 20 anni, estendendosi fino a includere Boyle e terminando solo con la morte di Hobbes (nel 1679).

Un altro aspetto delle abilità matematiche di Wallis era la sua grande capacità di fare calcoli a mente. Dormiva male e spesso faceva calcoli a mente mentre era sveglio nel suo letto. Una notte calcolò a mente la radice quadrata di un numero di 53 cifre. Il mattino seguente diede le 27 cifre della radice quadrata di quel numero, interamente a memoria. L'impresa fu giustamente considerata notevole, e Oldenburg, il segretario della Royal Society, inviò un collega per indagare su come ci fosse riuscito. Questa impresa fu considerata importante al punto da meritare una discussione nelle *Philosophical Transactions* della Royal Society del 1685.

Le sue opere non matematiche includono molte opere religiose, il libro di etimologia e grammatica *Grammatica linguae Anglicanae* (Oxford, 1653) ed il libro di logica *Institutio logicae* (Oxford, 1687). Fu inoltre coinvolto nell'ideazione di un sistema per insegnare a parlare a un ragazzo sordo alla Littlecote House. Holder aveva precedentemente insegnato a un sordo, Alexander Popham, a parlare "in modo chiaro e distinto, e con un tono gentile e aggraziato" [W. Holder, W. (1668). "Of an Experiment, Concerning Deafness". *Philosophical Transactions of the Royal Society* 3, pp. 665–668]. In seguito Wallis rivendicò il merito di questa impresa, portando Holder ad accusarlo di "rovistare presso i suoi vicini e adornarsi con le loro ricchezze" [Holder, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, supplement, 10].

Questa non fu l'unica accusa di plagio ricevuta, John Aubrey nel suo *Brief Lives* del 1982 scrive: "È certo che è una persona di reale valore, e può stare con molta gloria sulle sue stesse basi, non avendo bisogno di guardare a nessun uomo per la fama, di cui è così avido, che ruba fiori agli altri per adornare il proprio berretto; ad esempio presta attenzione ai discorsi di Sir Christopher Wren, Mr Robert Hooke, Dr William Holder, ecc... ed annota le loro nozioni nel suo taccuino, e poi lo stampa, senza citarli. Questo spesso è ciò di cui si lamentano."

La trattazione di John Wallis delle coniche

Wallis tratta le coniche nel *De sectionibus conicis, nova methodo expositis* e secondariamente in *Arithmetica infinitorum*, nel quale calcola, tra le altre cose, l'area di vari segmenti conici.

Nella sua trattazione fa frequentemente uso del cosiddetto *metodo degli indivisibili*, la cui spiegazione ed esempi di applicazioni sono lasciati alle proposizioni I-VI.

Per capire il metodo di Wallis è importante comprendere le basi dalle quali parte, quindi prima di considerare nello specifico le sue proposizioni più notevoli analizzeremo il metodo degli indivisibili (che è alla base della sua teoria), le notazioni e la terminologia di cui fa uso.

Il metodo degli indivisibili

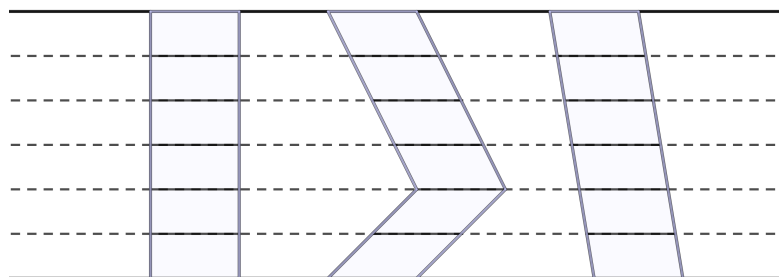
Il *metodo degli indivisibili* è uno strumento per calcolare aree e volumi, introdotto per la prima volta da Bonaventura Cavalieri (1598-1647) dopo il 1640 e si basa sul famoso *principio di Cavalieri*. Wallis però non usa il metodo tale e quale come è stato introdotto da Cavalieri, bensì apporta delle migliorie.

Principio di Cavalieri

Vediamo l'enunciato del *principio di Cavalieri*:

Si considerino due regioni del piano comprese tra due rette parallele. Se ogni retta parallela a quelle due interseca le due regioni staccando su di esse segmenti di uguale lunghezza su entrambe le regioni, allora le due regioni hanno la stessa area.

Si noti che è una condizione solamente sufficiente. Questo è l'enunciato per uno spazio di dimensione 2, è estendibile a spazi di dimensione superiore prendendo al posto di rette e segmenti degli iperpiani di tale spazio: ad esempio in uno spazio di dimensione 3 al posto delle rette parallele prendiamo dei piani paralleli e le rispettive porzioni di area che tali piani staccano sui solidi che intersecano.



Principio di Cavalieri. Le rette parallele a quelle che comprendono le tre figure staccano su ciascuna figura segmenti congruenti, quindi per il principio di Cavalieri le tre figure hanno la stessa area

Metodo degli indivisibili

Il *metodo degli indivisibili* è un metodo prevalentemente geometrico per il calcolo di aree e volumi, può essere visto come una forma moderna del *metodo di esaustione* greco.

Un *indivisibile*, in termini moderni, può essere pensato come un *ente geometrico di spessore infinitesimo*, così ad esempio abbiamo che

- in $\mathbb{R}^2$ un indivisibile è un segmento;
- in $\mathbb{R}^3$ come indivisibili possiamo prendere sì dei segmenti, ma anche delle porzioni di piano (poiché si può dire che una porzione di piano è "di spessore infinitesimo" rispetto ad un volume).

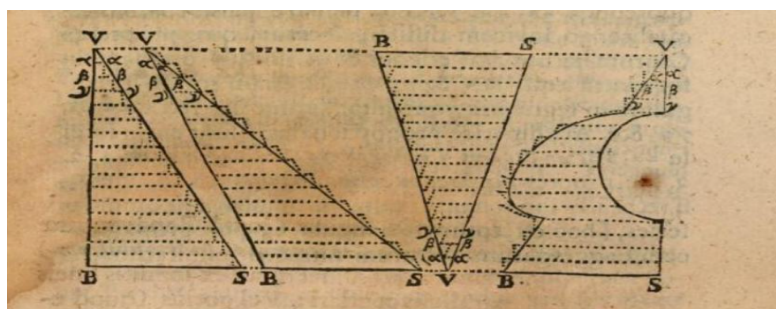
Il *metodo degli indivisibili* consiste nel dividere la figura della quale si vuole calcolare l'area (o il volume) in opportuni indivisibili e poi "sommare" le loro lunghezze (o aree) così da ottenere la misura dell'area (o volume) della figura considerata.

Questo metodo ha contribuito grandemente allo sviluppo dell'idea di integrale definito, nell'esempio della sezione successiva si capirà meglio il perché.

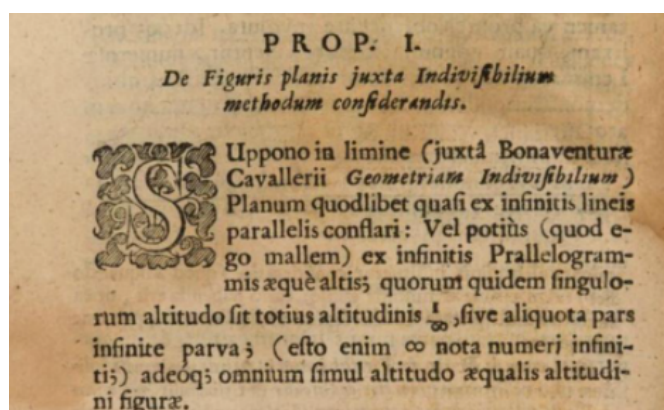
Metodo degli indivisibili rivisitato ed usato da Wallis

Il metodo degli indivisibili è spiegato da Wallis nella prima proposizione del *De sectionibus conicis* e, come dicevamo, ne fa uso a volte nel modo in cui l'ha ricevuto da Cavalieri, altre volte invece lo amplia: per lui gli indivisibili non sono solamente segmenti in $\mathbb{R}^2$ o aree in $\mathbb{R}^3$, ma anche "aree di figure di altezza infinitesima" (o, come direbbe lui, "aree di figure alte $\frac{1}{\infty}$ ") in $\mathbb{R}^2$ e "volumi di solidi di altezza infinitesima" in $\mathbb{R}^3$.

In particolare, nel piano, Wallis è solito considerare dei parallelogrammi per applicare il principio di Cavalieri e dei parallelogrammi di altezza infinitesima per usare il metodo degli indivisibili, come si vede già a partire dalla *proposizione I* del *De sectionibus conicis*

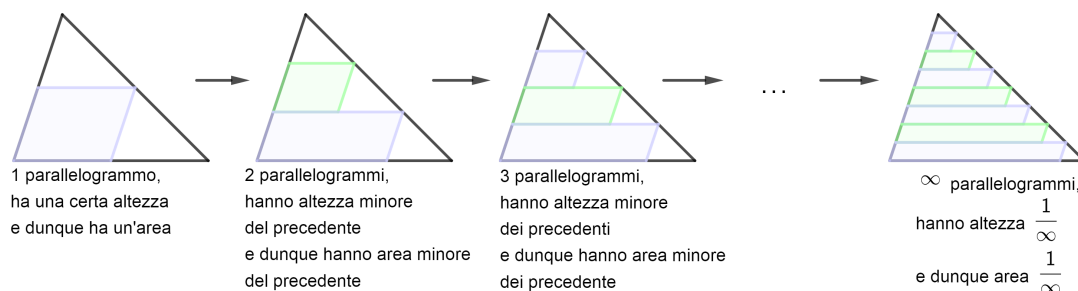


Così facendo, ad esempio, l'area del triangolo può essere vista sia come la somma delle lunghezze di tutti i segmenti contenuti nel triangolo, sia come la somma delle aree di tutti i parallelogrammi di altezza infinitesima contenuti nel triangolo.



Proposizione I, comincia a spiegare il metodo degli indivisibili dopo aver definito il piano "come fa Bonaventura Cavalieri in *Geometriam Indivisibilem*", ovvero formato da infinite rette parallele, oppure nel suo modo "formato da infiniti parallelogrammi con la stessa altezza, pari ad $\frac{1}{\infty}$ (un infinitesimo) dell'altezza totale del piano, in modo che tutti insieme siano uguali all'altezza complessiva della figura"; in questa proposizione definisce anche il simbolo " ∞ " come "infinito"

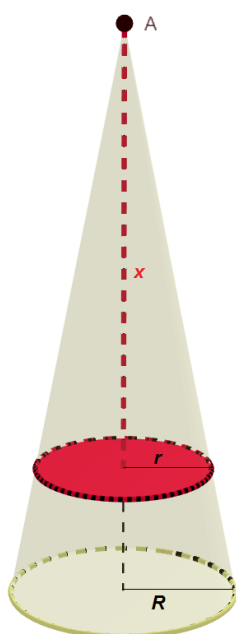
Inoltre si può vedere (e lo vedremo più avanti) che Wallis usa il metodo degli indivisibili per creare un processo che chiama "induzione". Questa sua "induzione" non è da intendersi nel senso moderno: è *circa* un passaggio al limite per step successivi, ma senza parlare esplicitamente di limite dato che non è un concetto appartenente alla sua epoca (bisognerà aspettare la pubblicazione del *Cours d'analyse* di Cauchy, nel 1821, per avere la prima buona definizione di limite). Possiamo dire che il metodo si configura come in figura



Mostra un'affermazione per qualche n piccolo e poi deduce il comportamento di tale affermazione quando n diventa molto grande (di nuovo, non parliamo di proposito del concetto di limite).

Vediamo un esempio sull'uso del metodo degli indivisibili:

Vogliamo calcolare il volume del cono retto in figura, di altezza h e raggio di base R .



Come *indivisibili* prendiamo tutti i cerchi interni al cono e paralleli alla sua base; vogliamo sommare tutte le loro aree (che sono riguardabili come dei volumi infinitesimi) al fine di ottenere il volume totale del cono.

Consideriamo, come in figura, l'indivisibile che dista x dal vertice del cono e chiamiamo r il suo raggio; allora i due coni sono simili, in particolare abbiamo che

$$R : r = h : x,$$

di conseguenza

$$r = \frac{Rx}{h}$$

e dunque l'area dell'indivisibile considerato vale

$$\pi \left(\frac{Rx}{h} \right)^2.$$

Analoghe considerazioni valgono per tutti gli altri indivisibili.

Vogliamo sommare tutte queste aree in modo da ottenere il volume del cono, lo facciamo usando ora il concetto di Wallis di indivisibile come "volume infinitesimo" (piuttosto che come semplice area) ed useremo una terminologia moderna:

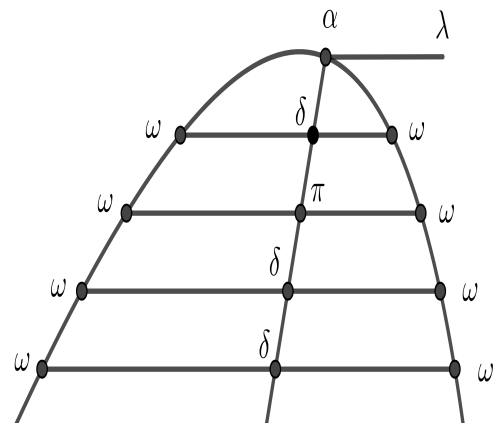
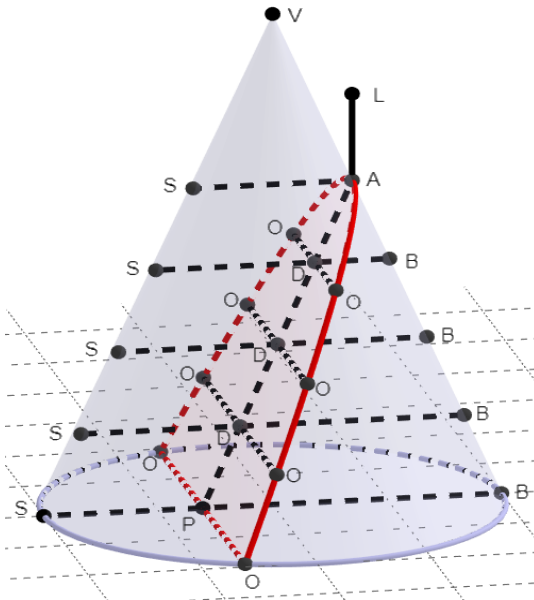
un'area può essere vista come un volume di altezza infinitesima, dunque possiamo calcolare il volume dell'indivisibile prima considerato (quello in rosso in figura) moltiplicando la sua area per una lunghezza infinitesima

$$\text{volume dell'indivisibile} = \pi \left(\frac{Rx}{h} \right)^2 \cdot dx ,$$

possiamo dire che questo è il nuovo indivisibile che consideriamo, un cilindro di altezza infinitesima. A questo punto, sommare le aree di tutti gli indivisibili contenuti nel cono significa sommare in modo continuo l'area degli indivisibili lungo tutta l'altezza, ovvero il volume del cono risulta essere

$$\text{volume cono} = \int_0^h \text{volume dell'indivisibile} = \int_0^h \pi \left(\frac{Rx}{h} \right)^2 \cdot dx = \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi h R^2 .$$

Concentriamoci sulla parabola: le notazioni che troviamo sono quelle in figura



e si possono subito fare le seguenti osservazioni:

- per contrassegnare i punti usa le lettere maiuscole dell'alfabeto inglese nella parabola vista come sezione conica, mentre usa lettere minuscole dell'alfabeto greco per quella nel piano;
- sono frequentissime le ripetizioni della stessa lettera per indicare punti non coincidenti; si noterà più avanti che, nonostante ciò, non c'è *quasi* mai ambiguità nelle sue dimostrazioni (dove è ambigua la figura da considerare, sarà del tutto equivalente considerare l'una o l'altra figura con lo stesso nome; si veda ad esempio la figura di sinistra, dicendo "consideriamo il triangolo ADB " c'è apparente ambiguità, ma si noterà che tale ambiguità scompare nel contesto della dimostrazione);
- le parabole che Wallis considera sono "storte" (per quanto riguarda quella come sezione del cono, lo si vede nella figura del *De sectionibus conicis*), nel senso che il cono del quale la parabola è sezione non è retto oppure la direttrice non è parallela ad uno degli assi coordinanti; possiamo quindi affermare che Wallis considera la parabola nelle sue forme più generali possibili.

Riguardo il terzo punto, specifichiamo che ogni parabola "storta" può essere "raddrizzata" e riportata alla forma che noi conosciamo come $y = ax^2$ con $a > 0$ (per farlo è sufficiente cambiare il sistema di riferimento).

Di conseguenza è per noi del tutto equivalente considerare una parabola come quella nelle figure precedenti e la parabola $y = ax^2$ con $a > 0$.

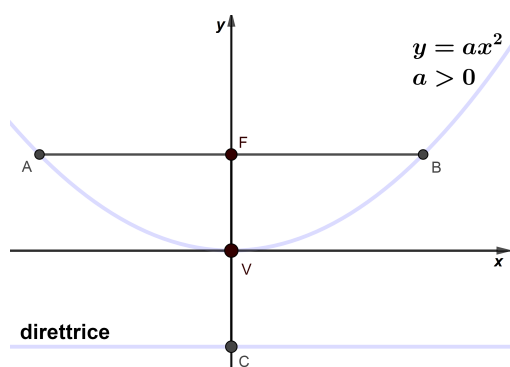
Per quanto riguarda la nomenclatura usata da Wallis, vediamo quali sono le differenze rispetto alla nostra nomenclatura al fine di eliminare possibili incomprensioni:

- come quasi tutti gli autori meno recenti, chiama "retta" sia una retta che un segmento;
- chiama "parabola $\alpha\omega$ " l'intera parabola (rispettivamente "parabola AO ");
- chiama **ordinata** ogni segmento $\delta\omega$ o $\pi\omega$ (rispettivamente DO o PO), ovvero ogni segmento di perpendicolare che congiunge un punto sulla parabola con l'asse della parabola;
- la semiretta $\alpha\delta$ (rispettivamente AD) non è l'asse della parabola, ma è un suo generico diametro; Wallis infatti nella sua trattazione considera sempre dei generici diametri della parabola, mai il suo asse nello specifico (si noti che l'asse della parabola è sì un diametro, ma è un diametro speciale);
- bisogna osservare che il punto π (rispettivamente P) non indica il fuoco, ma solamente il punto nel quale il diametro della parabola interseca la base del cono che lui disegna nelle sue figure. Nelle sue figure non compare mai il fuoco, infatti vedremo tra poco che Wallis non definisce mai la parabola a partire dal fuoco e dalla direttrice, neanche quando parla della parabola come luogo dei punti, quindi non aveva modi immediati di determinarne il fuoco;

- il segmento $\alpha\lambda$ (rispettivamente AL) è detto **lato retto** della parabola, Mydorge lo chiama anche *parametro*. Viene rappresentato come un segmento uscente dal vertice della parabola poiché "geometricamente non esiste né sulla parabola, né sul cono" (citazione dal *De sectionibus conicis*). Bisogna ben comprendere cosa intende Wallis per **lato retto** o *parametro* poiché il nome è ingannevole: non corrisponde al moderno parametro della parabola (definito come la distanza tra fuoco e direttrice). Si vedrà più avanti che il lato retto AL della parabola è quella quantità tale che $DO^2 = DA \cdot AL$ (questo risultato è proprio la definizione di lato retto ed è contenuto in una proposizione della quale in seguito parleremo; notare che l'apparente ambiguità di quali siano i punti D, O, A dei quali si parla, significa in questo caso che la relazione vale per ogni ordinata DO ed il relativo segmento di asse DA) e grazie a questa relazione possiamo vedere a cosa corrisponde, nella nostra notazione, il "lato retto" di Wallis relativo a quel diametro particolare passante per vertice e fuoco della parabola, ovvero relativo all'asse della parabola:

Consideriamo la parabola $y = ax^2$ con $a > 0$ (possiamo farlo senza perdere di generalità per quanto affermato prima).

Dalla relazione $DA \cdot AL = DO^2$ di Wallis segue che $DA = \frac{1}{AL} \cdot DO^2$, quindi per confronto possiamo affermare che il *lato retto* AL è tale che $AL = \frac{1}{a}$.



E' ben noto che la direttrice ha equazione $y = -\frac{1}{4a}$, inoltre

$$F = \left(0, \frac{1}{4a}\right), V = (0, 0), C = \left(0, -\frac{1}{4a}\right)$$

$$A = \left(-\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right), B = \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$$

si vede quindi facilmente che la distanza focale è $FV = \frac{1}{4a}$, la distanza del fuoco dalla direttrice è $FC = FA = FB = \frac{1}{2a}$ ed in particolare

$$\text{notiamo che } AB = \frac{1}{a}.$$

Possiamo quindi concludere che il *lato retto* o *parametro* di cui parla Wallis, quando consideriamo quello relativo all'asse, compare sulla parabola e corrisponde esattamente al segmento che unisce i due punti della parabola dati dall'intersezione della parabola stessa con la parallela alla direttrice passante per il fuoco.

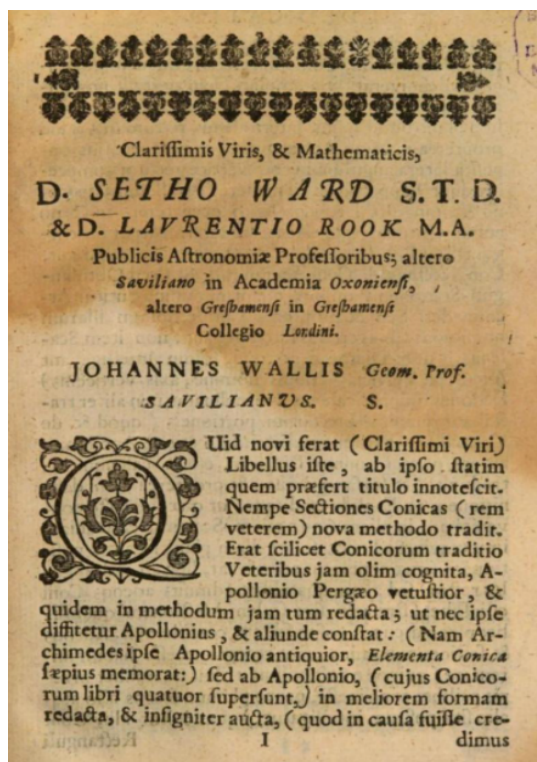
(Le altre relazioni trovate ci permettono di dire che il *lato retto* di Wallis misura 4 volte la distanza focale e 2 volte la distanza del fuoco dalla direttrice.)

Il motivo per cui Wallis afferma che il lato retto "geometricamente non esiste sulla parabola o sul cono" discende probabilmente dal fatto che, come dicevamo prima, nelle sue raffigurazioni della parabola non compare mai il fuoco.

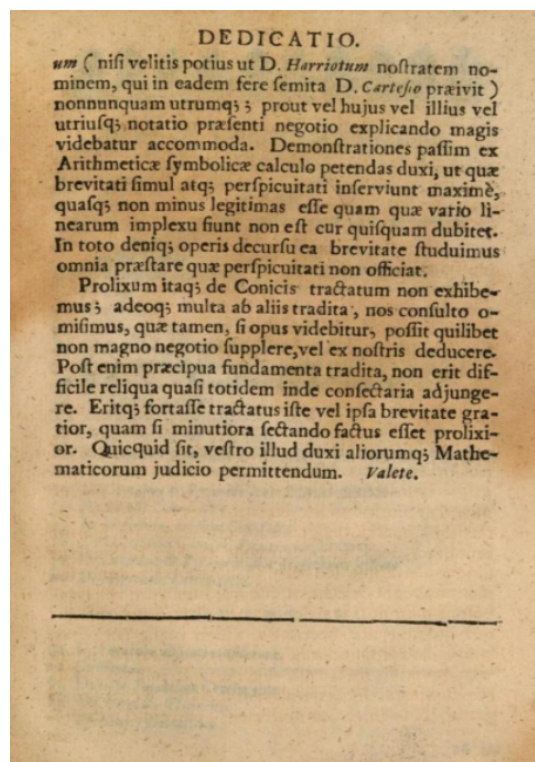
Per quanto riguarda il *lato retto* aggiungiamo solo che sarà definito come una costante di proporzionalità e si potrebbe vedere che ad ogni differente diametro della parabola considerato corrisponde un diverso *lato retto*, ma non ci addentreremo ulteriormente nella questione.

Studio delle coniche

Lo studio delle coniche ad opera di Wallis si trova principalmente, come il nome suggerisce, nel suo *De sectionibus conicis, nova methodo expositis* (1655); l'unica cosa non presente in questo libro è la quadratura delle coniche, ma se ne parlerà in seguito.



De sectionibus conicis, nova methodo expositis, prima pagina della dedica



De sectionibus conicis, nova methodo expositis, ultima pagina della dedica

Come Wallis dice all'ultimo capoverso dell'ultima pagina della dedica, il suo intento non è di far conoscere al lettore le coniche in ogni loro sfaccettatura, proprietà e applicazioni, per conoscere nel dettaglio tutte le proprietà delle coniche esistono già tanti altri trattati. Nel suo scritto invece si trovano poche (circa 20) proposizioni per ogni conica, che ne racchiudono le proprietà essenziali e lascia poi al lettore il compito di dedurre da queste tutte le altre.

L'intento di Wallis è presentare le coniche in modo diverso ed innovativo, con un nuovo metodo rispetto a quanto è stato fatto finora (intento chiaro già dal titolo dell'opera, *nova methodo expositis*).

La prima novità che si riscontra in questo trattato di Wallis è il fatto che, nonostante si parli di coniche (ovvero un argomento di geometria), affronta le dimostrazioni anche algebricamente invece che unicamente dal punto di vista geometrico. E' infatti convinto che le dimostrazioni algebriche siano valide tanto quanto quelle geometriche ed anzi

spesso risultano più brevi, chiare ed universali. Spesso si trovano delle "doppie dimostrazioni" delle proposizioni, una dal punto di vista geometrico e l'altra dal punto di vista algebrico/analitico, a riprova del fatto che entrambi i metodi sono validi per giungere allo stesso risultato.

La seconda riguarda invece il modo di considerare le coniche: il *De sectionibus conicis* è diviso in due parti, *Pars prima* e *Pars secunda*. Nella prima le coniche sono viste secondo la tradizione, ovvero come sezioni del cono. Nella seconda invece, ed è specialmente qui la grande novità, le coniche sono definite a partire da delle relazioni di carattere algebrico che le caratterizzano, ovvero sono viste come luogo dei punti.

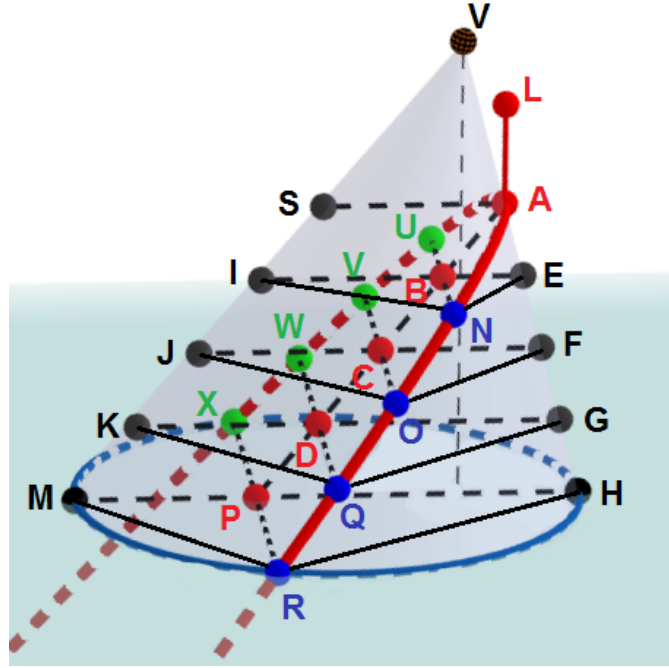
E' proprio l'uso del metodo degli indivisibili che gli consente di fare questo passo poiché consente di esprimere il rapporto tra una sezione conica e la sua realizzazione nel piano.

Di seguito parleremo solamente della parabola per i seguenti motivi:

- è, in un certo senso, la conica più semplice;
- attorno ad essa si raccolgono problematiche e metodologie generali, che riguardano anche le altre coniche: vedremo che Wallis procede parallelamente a dimostrare proprietà analoghe per tutte le coniche;
- nel trattato di Wallis, così come in quasi tutte le altre trattazioni delle coniche prima e dopo di lui, la parabola ha un ruolo privilegiato (per le motivazioni sopra citate).

Si può osservare che qui Wallis sfrutta il metodo degli indivisibili per estendere all'infinito un processo finito, possiamo quasi dire che lo usa per giustificare "ciò che non è direttamente visibile nella figura".

Dimostrazione modernizzata:



La base del cono è un cerchio, quindi i triangoli INE , JOE , KQG , MRH , ... sono rettangoli, di conseguenza per il primo teorema di Euclide

$$\begin{aligned} BN^2 &= EB \cdot BI & CO^2 &= FC \cdot CJ \\ DQ^2 &= GD \cdot DK & PR^2 &= HP \cdot PM \quad \dots\dots \end{aligned}$$

I quadrilateri $IBNJ$, $JCDK$, $KDPM$, ... sono parallelogrammi, quindi in particolare $IB = JC = KD = MP$..., ma allora le relazioni precedenti possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} BN^2 &= BE \cdot \frac{CO^2}{CF} & CO^2 &= CF \cdot \frac{DQ^2}{DG} \\ DQ^2 &= DG \cdot \frac{PR^2}{PH} \quad \dots\dots \end{aligned}$$

che altro non sono se non le proporzioni

$$BN^2 : CO^2 = BE : CF \quad CO^2 : DQ^2 = CF : DG$$

$$DQ^2 : PR^2 = DG : PH \quad \text{.....}$$

le quali possono essere riscritte come un'unica "proporzione continua"

$$BN^2 : CO^2 : DQ^2 : PR^2 : \dots = BE : CF : DG : PH : \dots$$

Ora, i triangoli ABE , ACF , ADG , APH , ... sono tutti simili, quindi in particolare abbiamo le proporzioni

$$BE : CF : DG : PH : \dots = BA : CA : DA : PA : \dots$$

ed unendo questi due ultimi risultati abbiamo

$$BN^2 : CO^2 : DQ^2 : PR^2 : \dots = BA : CA : DA : PA : \dots$$

dalla quale discende direttamente la tesi poiché, ad esempio, è $PR^2 : DQ^2 = PA : DA$, ovvero $PR^2 = \frac{DQ^2}{DA} \cdot PA$, cioè $\frac{DQ^2}{DA}$ è la costante di proporzionalità tra PR^2 (il quadrato dell'ordinata) e PA (la parte di asse compresa tra il punto d'intersezione dell'ordinata ed il vertice) ed analogamente si può fare con tutte le altre ordinate. L'enunciato è così dimostrato.

Volendo però terminare la dimostrazione costruendo la parabola, allo stesso modo di Wallis, diciamo che:

se ora le ordinate sono prese equidistanti, risulta $BA = CB = DC = PD = \dots$ e di conseguenza $CA = 2BA$, $DA = 3BA$, $PA = 4BA$,

Da questo segue che la proporzione precedente diventa

$$BN^2 : CO^2 : DQ^2 : PR^2 : \dots = BA : 2BA : 3BA : 4BA : \dots$$

cioè

$$BN^2 : CO^2 : DQ^2 : PR^2 : \dots = 1 : 2 : 3 : 4 : \dots$$

dalla quale, sfruttando la proprietà dello scomporre su ciascuna singola proporzione, si vede facilmente che

$$CO^2 - BN^2 = BN^2, \quad DQ^2 - CO^2 = BN^2, \quad PR^2 - DQ^2 = BN^2, \quad \text{.....}$$

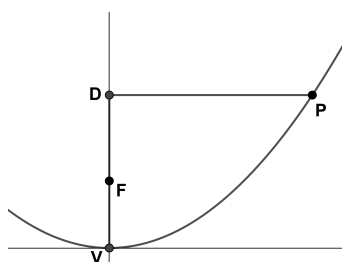
ovvero BN^2 , CO^2 , DQ^2 , PR^2 , ... sono i termini di una progressione aritmetica di ragione BN^2 . A questo punto il metodo degli indivisibili conclude la costruzione poiché ci consente di ammettere l'esistenza degli altri infiniti segmenti in progressione aritmetica con quelli visti nel corso della dimostrazione.

□

Confrontando queste due versioni della stessa dimostrazione si può notare la diversità del concetto di rigore tra l'epoca di Wallis e la nostra. La dimostrazione di Wallis

appare decisamente più breve, ma è meno specifica, meno dettagliata e spesso i passaggi non sempre sono giustificati. Nonostante ciò, questo stile dimostrativo era all'epoca considerato rigoroso.

Osserviamo anche che nella nostra visione analitica della parabola, $y = ax^2$, questa proposizione discende direttamente dall'equazione ed è da considerarsi banale:



Preso un qualsiasi punto P sulla parabola, è $P = (x_0, ax_0^2)$ e la sua proiezione sull'asse della parabola è $D = (0, ax_0^2)$; quindi il rapporto tra il quadrato di quella che Wallis chiama "ordinata" ed il segmento di asse che congiunge D col vertice della parabola è

$$\frac{PD^2}{DV} = \frac{x_0^2}{ax_0^2} = \frac{1}{a}$$

(si osservi che questa quantità è uguale al **lato retto** della parabola).

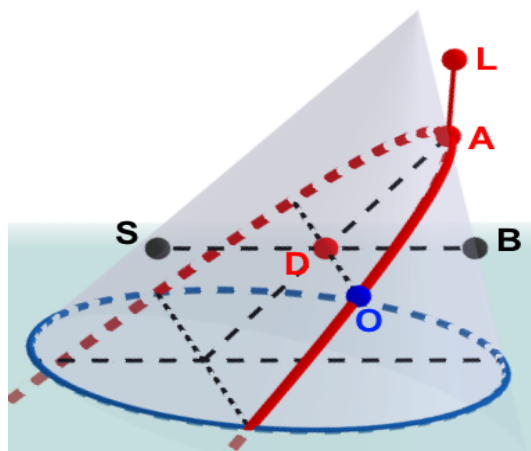
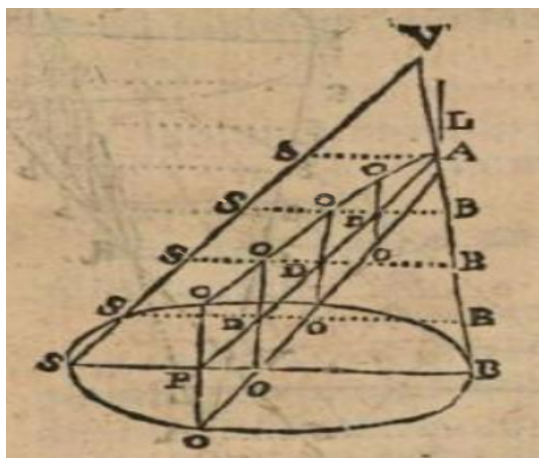
Possiamo quindi affermare che tale proprietà è banale vedendo la parabola come luogo dei punti, non lo è invece considerandola come sezione conica.

Proposizione XII: De parabolae latere-recto

Di grande rilievo è la *proposizione XII*, è divisa in due parti: nella prima Wallis mostra come determinare il lato retto della parabola (più precisamente, qui *definisce* il lato retto), nella seconda dà un metodo per trovare il cono del quale la parabola è sezione (ricordiamo però che qui la parabola è ancora definita come sezione conica), passaggio importante ma già presente nella letteratura (è presente già dal tempo di Apollonio ed anche autori più recenti e precedenti o contemporanei di Wallis ne parlano, ad esempio Mydorge). La *proposizione XII* non ha un vero e proprio enunciato, ciò che sarà trattato è chiaro dal titolo.

L'importanza di questa dimostrazione risiede principalmente nel fatto che la relazione algebrica discendente da questa proposizione sarà poi usata nella *Pars secunda* per definire la parabola come luogo dei punti. Inoltre Wallis dà una "doppia dimostrazione" alla seconda parte: prima dimostra usando strumenti di geometria sintetica, poi ripete la dimostrazione ma con metodi analitici.

Vediamo la prima parte della dimostrazione nella notazione di Wallis:



Come all'inizio della *proposizione VIII* abbiamo $DO^2 = BD \cdot DS$, che possiamo riscrivere come proporzione

$$BD : DO = DO : DS$$

e questo significa che dati BD e DS è sempre possibile trovare DO che soddisfa la relazione.

Il viceversa però è falso, infatti BD e DS sono esterni alla parabola (B ed S sono punti del cono) e proprio per la *proposizione VIII* esistono infiniti BD ed SD tali che $DO^2 = BD \cdot DS$.

Allora si definisce il *lato retto* LA come il quarto proporzionale tra DA , BD , DS , cioè LA è il segmento tale che

$$DA : BD = DS : LA$$

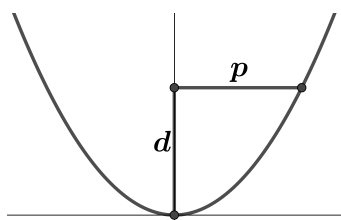
in modo che si abbia

$$DA \cdot LA = BD \cdot DS = DO^2.$$

Wallis aggiunge:

" in simboli, detti $BD =: b$, $DS =: s$,
 $DA =: d$, $LA =: l$, $DO =: p$, si ha che
 $p^2 = (bs =) dl$ ".

Il lato retto è così determinato.



Si osservi che è questa proposizione a giustificare quanto detto a pagina 17: trasponendo sulla parabola $y = ax^2$ la relazione della proposizione, la situazione è come in figura ed abbiamo dunque

$$y = ax^2 \quad \text{e} \quad p^2 = d \cdot l = d \cdot LA$$

di conseguenza il lato retto LA corrisponde proprio ad $\frac{1}{a}$.

Si può anche osservare che non c'è ambiguità nella notazione usata da Wallis, ad esempio quando parla del segmento DO i ragionamenti che seguono sono validi qualsiasi sia il segmento DO che si considera sulla sua figura.

Per quanto riguarda la seconda parte della proposizione, quella nella quale si effettua sostanzialmente il passaggio dalla parabola sul cono alla parabola come curva piana, ripetiamo solamente che ne dà due dimostrazioni: si rifanno alle figure riportate qua sotto, l'obiettivo di entrambe è di dimostrare che le due parabole sono congruenti e

- la prima dimostrazione sfrutta tecniche di geometria sintetica, come similitudini, parallellismi, relazioni tra angoli;
- per quanto riguarda la seconda dimostrazione Wallis dice "allo stesso modo è possibile dimostrarlo *analiticamente*" ed affronta la dimostrazione della congruenza delle due parabole sfruttando le proporzioni, ovvero con un linguaggio algebrico.

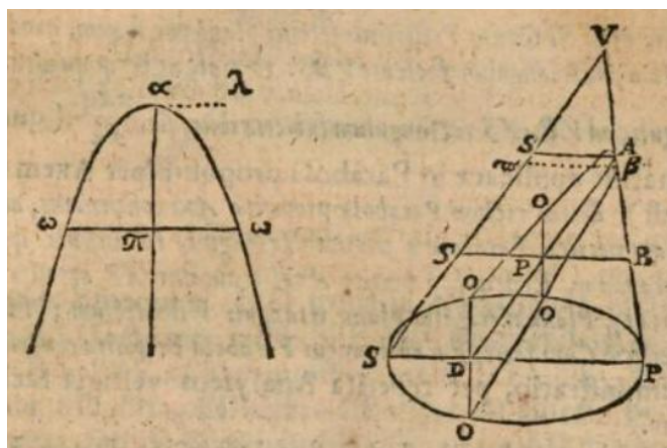
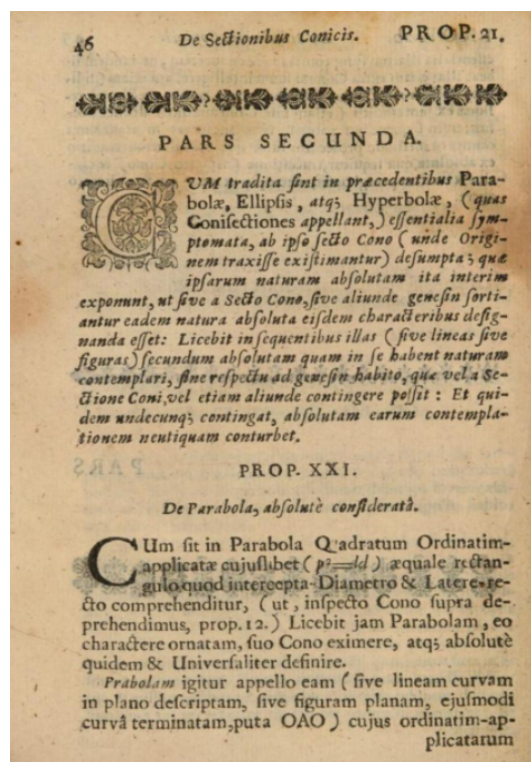


Figura usata per la dimostrazione della seconda parte della *proposizione XII*.

Pars secunda: coniche come luogo dei punti

PARS II.	
21	De Parabola absolute considerata.
22	Coefficientia.
23	De recta Parabolam contingente.
24	De Parabola Diametris.
25	Effectiones Geometricae.
[26 De	
26	De Ellipsi absolute considerata.
27	De Ellipsi Diametro transversa & verticibus oppositis.
28	Coefficientia.
29	De Ellipsi Diametris Coniugatis.
30	De recta Ellipsin contingente.
31	De Ellipsos Diametris.
32	Effectiones Geometricae.
33	De Hyperbola absolute considerata.
34	De Diametro transversa & Hyperbolis Oppositis.
35	Coefficientia.
36	De recta Hyperbolam contingente.
37	De Hyperbolae Diametris.
38	Effectiones Geometricae.
39	De Hyperbolae Asymptotis rectis.
40	De Hyperbolis Asymptotis.
41	De Hyperbolae Diametris Coniugatis.
42	De Hyperbolis Coniugatis.
43	De Systemate Hyperbolicis.
44	Ellipsos & Hyperbolae Comparatio.
APPENDIX.	
45	De Paraboloidis Cubicali.
46	De recta ipsum contingente.
47	De ipsius Diametris.
48	De Area Paraboloidis; Conoidis item vel Tzamidoidis ipsi accommodati.
49	De Paraboloidibus aliis.
50	De Ellipsoidibus & Hyperboloidibus.

Indice *Pars secunda* (e appendice)Prima pagina della *Pars secunda*

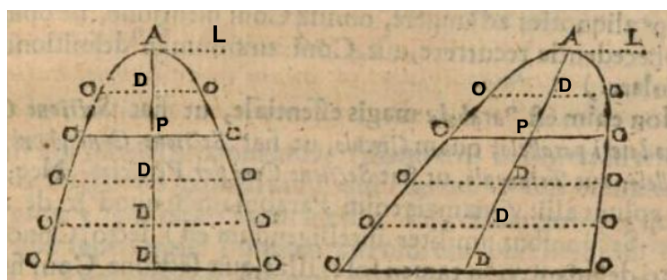
In questa seconda parte del *De sectionibus conicis*, Wallis considera le proprietà delle coniche ottenute nella *pars prima* come a sé stanti, in modo indipendente rispetto alla definizione delle coniche come sezioni di un cono o una qualsiasi altra loro genesi.

L'obiettivo che si prefigge è di considerare le coniche come curve piane, luoghi dei punti, astraendole dalla definizione come sezioni coniche. Per raggiungere questo scopo le definisce a partire dalle relazioni trovate nella *pars prima*, così ad esempio la parabola è definita come quella curva piana che soddisfa la relazione della *proposizione XII*; più precisamente, con parole di Wallis, la definizione di questa curva che lui chiama "parabola assoluta" è data nella *proposizione XXI: De parabola, absolute considerata*:

"Chiamo parabola la curva nella quale il quadrato delle ordinate è proporzionale al segmento di diametro che congiunge il vertice con l'ordinata [...] e tale costante di proporzionalità la chiamo lato retto",

la parabola "assoluta" risulta allora definita proprio dall'equazione $p^2 = dl$ (o, esplicitando i segmenti, $DO^2 = DA \cdot AL$).

Questa proposizione è di importanza fondamentale poiché consente il passaggio dalla parabola vista come sezione del cono alla parabola vista sul piano come luogo dei punti



La parabola "assoluta", a sinistra con direttrice parallela ad uno degli assi coordinanti

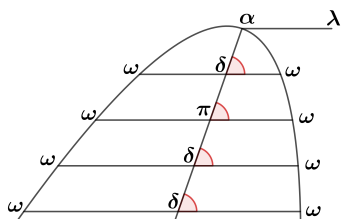
(si noti che la differenza tra questa e la *proposizione XII* sta nel fatto che nella *XII* la parabola è ancora definita come sezione conica).

Questo passaggio è tutt'altro che banale, si può constatare che è stato trascurato in tutta la letteratura precedente e posteriore. Come esempi di questa tendenza a trascurare il passaggio si possono vedere

- *Prodromi catoptricarum et dioptricarum sive Conicorum [...]* *praeferentis* del 1639 di Mydorge, nel quale solamente constata che le proprietà di cui godono le sezioni coniche sono le stesse di cui godono le rispettive curve piane;
- *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conicorum decem libris comprehensum* del 1647 di Saint-Vincent, nel quale il passaggio dalle sezioni coniche alle singole coniche avviene semplicemente non considerando più il cono sul quale la conica è originata, lasciandole comunque definite come sezioni coniche;
- *Elementa curvarum linearum* del 1661 di De Witt, dove le coniche sono considerate unicamente come curve piane.

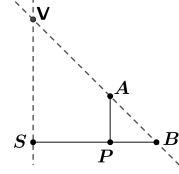
Invece Wallis con questa proposizione (unita alla sua inversa) riesce in sostanza a dimostrare che le definizioni della parabola piana, come luogo dei punti, e della parabola "di Apollonio", ovvero come sezione conica, sono del tutto equivalenti. Grazie a questa equivalenza si può affermare che ogni parabola piana ha il suo corrispettivo sul cono (e viceversa). Inoltre non serve mostrare che entrambi i modi di vedere la parabola hanno le stesse proprietà, l'equivalenza assicura che dimostrando una proprietà per una parabola piana, tale proprietà vale anche per la parabola come sezione conica (e viceversa).

Per dimostrare la proposizione, Wallis costruisce esplicitamente il cono del quale la parabola piana è sezione, è dunque una dimostrazione costruttiva:

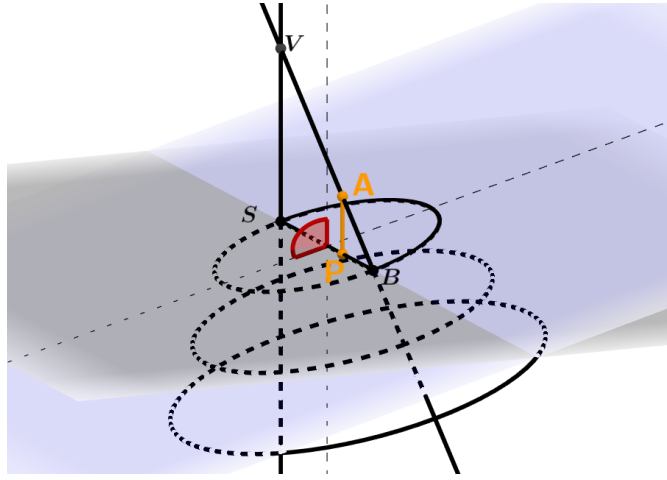


Sia data la parabola piana $\alpha\omega$ di asse $\alpha\pi$, ordinate $\pi\omega$, angolo tra ordinate ed asse $\alpha\hat{\pi}\omega$ e lato retto $\alpha\lambda$; vogliamo mostrare che questa parabola è "uguale a quella prodotta dal sezionare un cono".

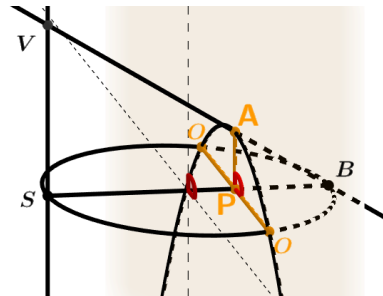
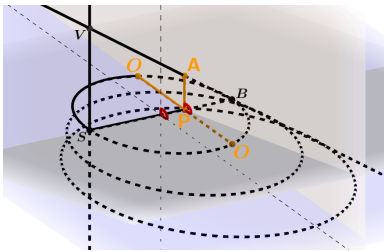
Prendiamo i segmenti $AP = PB = \alpha\pi$ con l'angolo $\widehat{APB}$ retto e sul prolungamento di PB costruiamo il segmento $PS = \alpha\lambda$. Tracciamo poi da S la parallela ad AP e la retta BA , che intersecherà in V la parallela ad AP condotta da S . Così facendo abbiamo costruito il triangolo VBS .



Costruiamo ora il cerchio di diametro BS che formi un angolo pari a $\alpha\pi\omega$ col piano del triangolo VBS . Si può supporre l'esistenza di infiniti cerchi col diametro parallelo a BS e che stanno su piani paralleli a quello del primo cerchio costruito, questi individuano il cono come in figura.



A questo punto costruiamo un piano APO che sia ortogonale al piano del triangolo VBS e chiamiamo O l'intersezione tra APO e la prima circonferenza costruita; il piano APO è anche ortogonale a SB dal momento che l'angolo $\widehat{APB}$ è retto. Tale piano APO individua l'angolo $\widehat{APO}$ uguale all'angolo che il cerchio SOB forma col piano del triangolo VBS , ovvero uguale a $\alpha\pi\omega$, ed interseca il cono lungo una sezione che comprende il segmento conico OAO .



Ora, AP è parallelo al lato VS del triangolo VBS , ma abbiamo visto che VS è una generatrice del cono precedentemente costruito. Dunque AP svolge il ruolo di diametro della parabola e tale parabola è proprio la sezione tagliata sul cono dal piano APO . Si conclude che, per le relazioni tra gli angoli viste e quelle tra punti costruite nel corso della dimostrazione, la parabola appena costruita è congrua a quella di partenza. Per citare Wallis, "tale sezione è la parabola che già Apollonio aveva definito". $\square$

Wallis esplicita anche per l'ellisse e l'iperbole "assolute", ovvero come curve piane, una costruzione del cono di cui sono sezione analoga a quanto visto per la parabola; queste due costruzioni sono contenute rispettivamente nella *proposizione XXVI* e *proposizione XXXIII*.

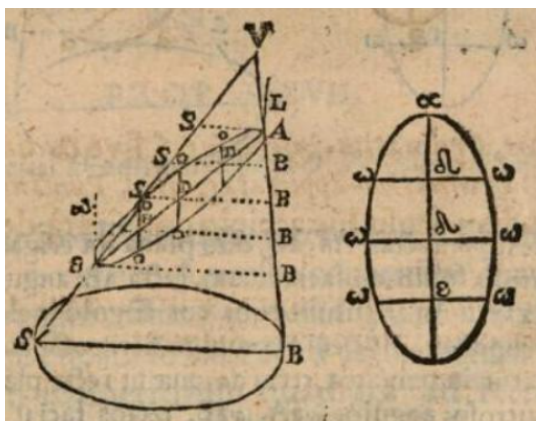


Immagine dalla *proposizione XXVI*.

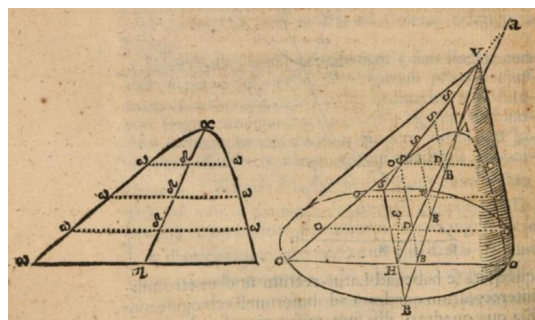
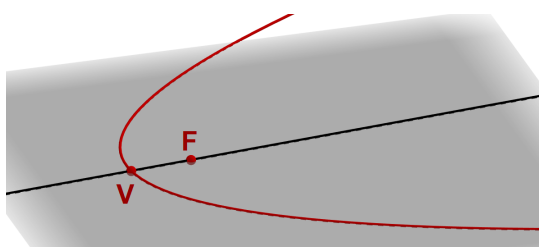


Immagine dalla *proposizione XXXIII*.

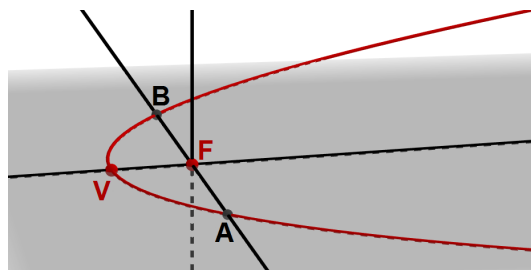
Costruzione del cono adattato alla parabola con Geogebra

Data una parabola piana, vediamo come costruire su Geogebra il cono del quale tale parabola è sezione. Per la precisione vediamo ora come può essere semplificata la costruzione di Wallis conoscendo il fuoco della parabola e dunque, potendo considerare l'asse della parabola al posto di un suo generico diametro. Per avere la costruzione più generale, senza conoscere il fuoco, è sufficiente ripetere esattamente la costruzione vista nella proposizione di Wallis appena dimostrata.

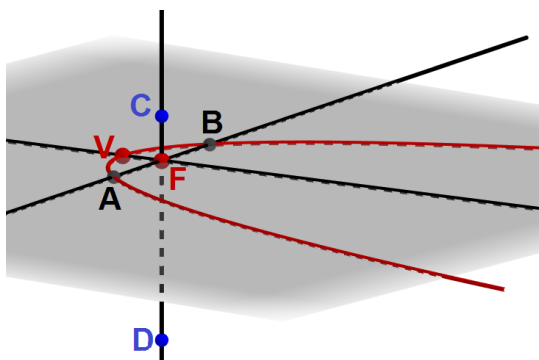
(Costruzione già pronta: <https://www.geogebra.org/m/cu2j49tu>)



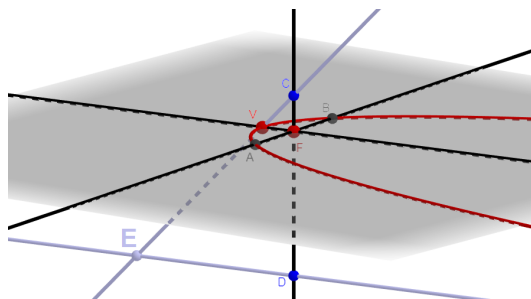
1) Costruiamo una parabola su un piano, chiamiamo V il suo vertice, F il suo fuoco e tracciamo il suo asse.



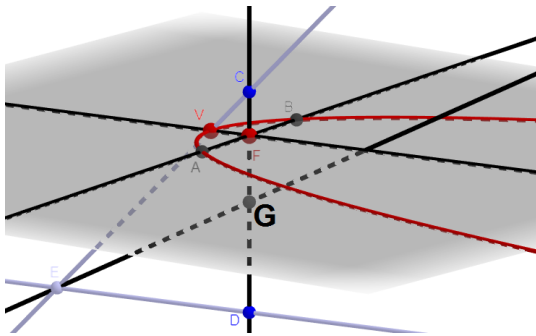
2) Tracciamo dal fuoco la perpendicolare all'asse che giace sul piano della parabola, questa la interseca nei punti A e B. Tracciamo poi, sempre dal fuoco, la perpendicolare al piano della parabola.



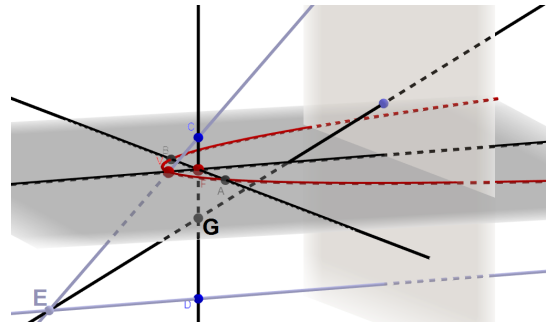
3) Sulla perpendicolare al piano della parabola passante per F prendiamo da una parte il segmento FC di lunghezza pari alla distanza focale, ovvero congruente a FV, dall'altra il segmento FD lungo quanto il lato retto della parabola (dunque lungo 4 volte FV o lungo quanto $AB=2FA=2FB$).



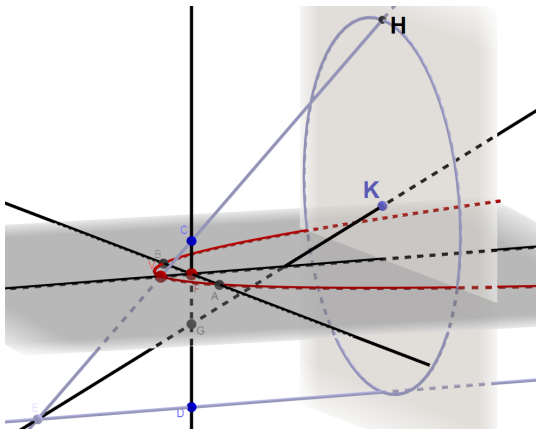
4) Tracciamo la retta CV, la parallela all'asse della parabola passante per D e chiamiamo E il loro punto d'intersezione; E sarà il vertice del cono che stiamo costruendo e le due rette appena tracciate saranno le sue direttrici.



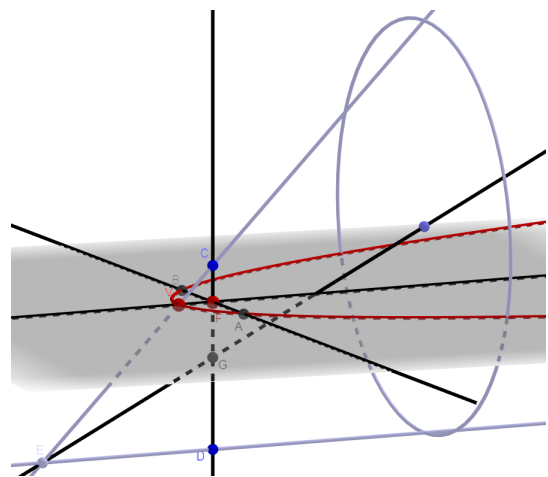
5) Chiamiamo G il punto medio del segmento CD e tracciamo la retta EG. La circonferenza con centro sulla retta parallela all'asse della parabola passante per G e raggio $GD=GC$ passerà esattamente per A e B.



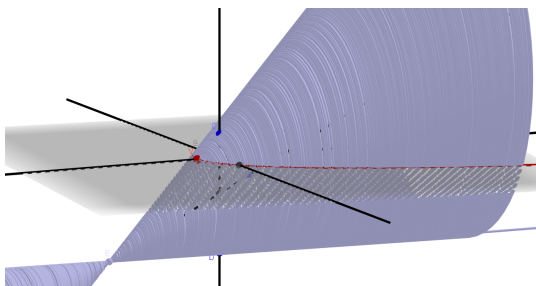
6) Prendiamo un punto qualsiasi sulla retta EG e tracciamo da quel punto il piano ortogonale all'asse della parabola.



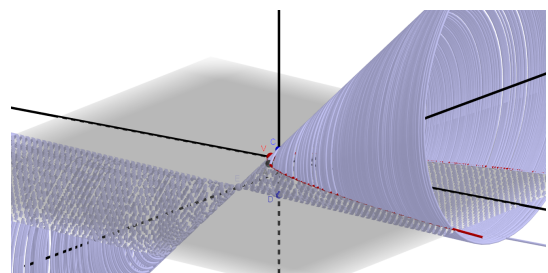
7) Disegniamo l'intersezione H tra il piano ed una delle due direttrici del cono (le rette ED e EC), poi tracciamo su quel piano la circonferenza di centro K e raggio HK; questa circonferenza passerà anche per l'altra direttrice del cono.



8) Attiviamo la traccia della circonferenza; ora spostando il suo centro lungo la retta EG, la circonferenza genererà il cono del quale la parabola è sezione.



Uno scorcio del cono



Un altro scorcio del cono

Le altre coniche

Guardando l'insieme delle proposizioni contenute nella *Pars secunda* si possono notare dei parallelismi:

Parabola	Ellisse	Iperbole
Prop. XXI: De parabola absolute considerata.	Prop. XXVI: De ellipsi absolute considerata.	Prop. XXXIII: De hyperbola absolute considerata.
	Prop. XXVII: De ellipseos diametro-transversa et verticibus-oppositis.	Prop. XXXIV: De diametro transversa, et hyperbolis oppositis.
Prop. XXII: Corollaria.	Prop. XXVIII: Corollaria.	Prop. XXXV: Corollaria.
Prop. XXIII: De recta parabolam contingente.	Prop. XXX: De recta ellipsin contingente.	Prop. XXXVI: De recta hyperbolam contingente.
	Prop. XXIX: De ellipseos diametris conjugatis.	Prop. XLI: De hyperbolae diametris conjugatis.
		Prop. XLII: De conjugatis hyperbolis.
		Prop. XLIII: De sistemat hyperbolico.
		Prop. XLIV: Ellipseos et hyperbolae comparatio.
Prop. XXIV: De parabolae diametris.	Prop. XXXI: De ellipseos diametris.	Prop. XXXVII: De hyperbolae diametris.
Prop. XXV: Effectiones geometricae.	Prop. XXXII: Effectiones geometricae.	Prop. XXXVIII: Effectiones geometricae.
		Prop. XXXIX: De hyperbolae asymptotis.
		Prop. XL: De hyperbolis asymptotis.

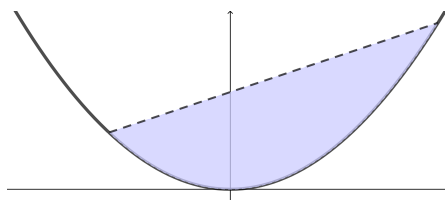
Come si diceva, dopo aver trattato la parabola passa a considerare gli stessi problemi relativi alle altre due coniche, per le quali poi si sofferma ad aggiungere altre loro specifiche proprietà.

Quadratura della parabola e dei "paraboloidi" usando il metodo degli indivisibili

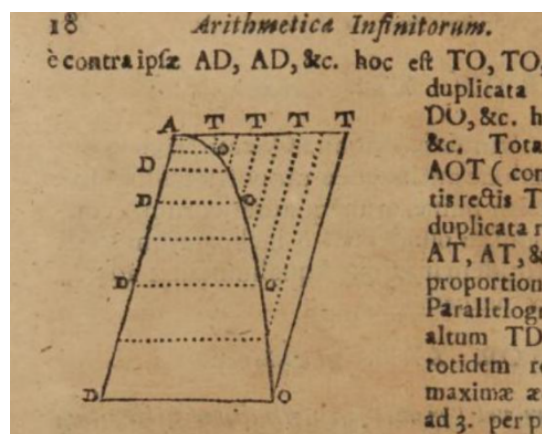
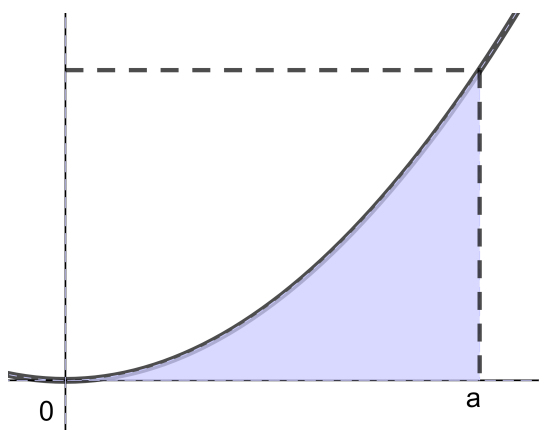
L'argomento che stiamo per trattare è contenuto in *Arithmetica infinitorum*, non nel *De sectionibus conicis*. La motivazione di ciò sta probabilmente nel fatto che, nonostante sia un argomento che riguarda le coniche, era più visto da Wallis come relativo al calcolo o all'algebra piuttosto che alla geometria.

Wallis non intende "paraboloide" nel senso moderno del termine (ovvero la superficie in $\mathbb{R}^3$), intende una qualsiasi curva della forma $y = x^n$ con n razionale e $n \neq -1$ (per $n = -1$ si ha un'iperbole, se poi n è una frazione propria, la curva risulta essere una radice, ma Wallis la chiama lo stesso paraboloide). Chiama cioè "paraboloide" le curve che *assomigliano* graficamente alla parabola, nonostante non siano delle coniche.

Quadrare una curva significa calcolarne l'area, dunque quando diciamo di voler quadrare una parabola intendiamo calcolare l'area di un segmento parabolico, come quello in figura.



Più precisamente Wallis calcola la seguente area:



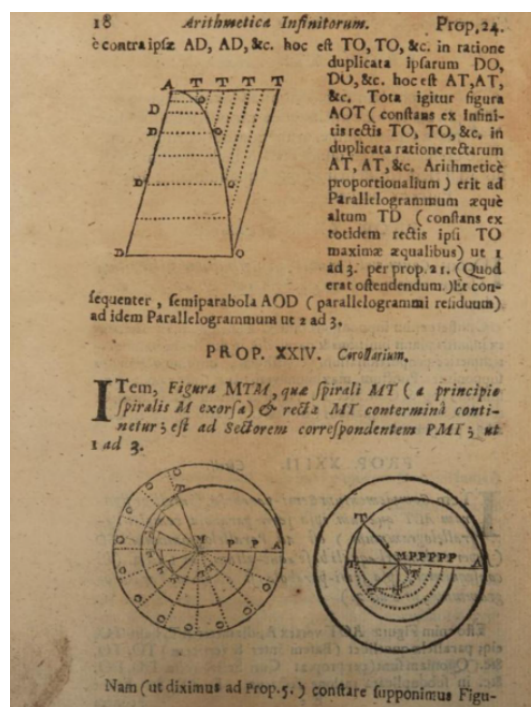
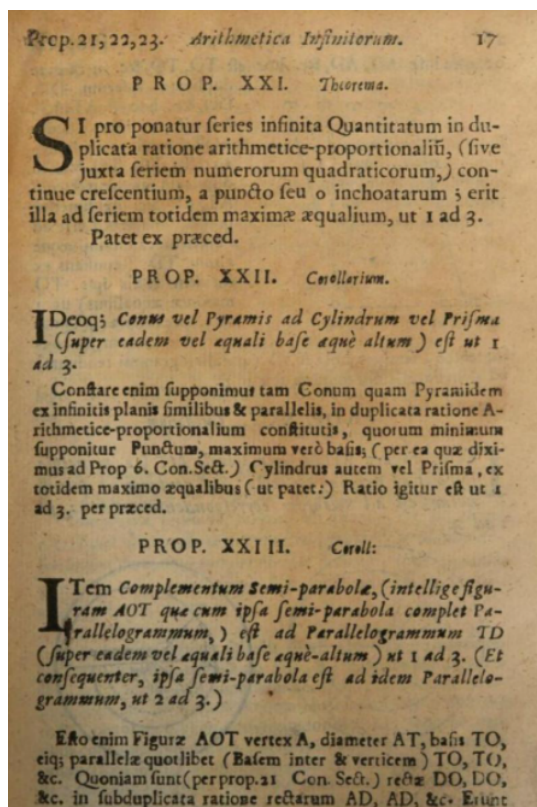
e poi la complementa all'area del rettangolo per ottenere l'area di questa metà di un segmento parabolico (nel suo libro, si veda la figura di destra, al posto del rettangolo c'è un parallelogramma poiché non prende l'asse della parabola parallelo ad uno degli assi coordinanti).

Già negli anni '30 del diciassettesimo secolo Fermat e Cavalieri erano in grado di quadrare curve della forma $y = x^n$ per n intero positivo, Wallis estende tale calcolo al caso in cui n

è negativo e/o frazionario (anche se sbaglia la dimostrazione relativa all'iperbole, cioè il caso $n = -1$) e ci riesce proprio grazie alla sua rivisitazione del metodo degli indivisibili. La quadratura di queste curve è stata molto importante poiché ha fornito un grosso contributo allo sviluppo del calcolo integrale: per quadrare un paraboloide della forma $y = x^n$ si passa per il calcolo dell'area sottesa da tale curva (si veda la figura precedente) che non è altro che il calcolo dell'integrale definito

$$\int_0^a x^n dx.$$

Il caso della parabola

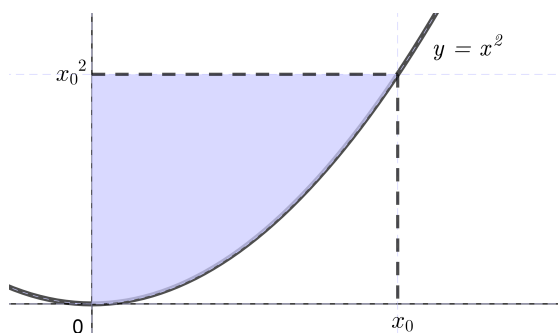


Vediamo più nel dettaglio il suo modo di procedere nel caso della quadratura della parabola $y = x^2$, contenuta nella *proposizione XXIII (Arithmetica infinitorum)*.

Notiamo inoltre, dalle figure precedenti, che la *proposizione XXIII* è un corollario della *proposizione XXI* (che a sua volta viene dimostrata dicendo "Patet ex præced", ovvero "Segue dal precedente", dunque nonostante sia categorizzata come "Theorema" è anch'essa un corollario).

Il discorso sarà molto modernizzato e ripercorreremo i passi delle proposizioni delle quali la *XXIII* è un corollario. Il motivo di questa necessità di una modernizzazione risiede nel fatto che lo stile dimostrativo di Wallis in *Arithmetica infinitorum* sono decisamente lontane da quello a cui siamo abituati; il nostro obiettivo non è di attenerci al formalismo di Wallis ma vogliamo comprendere il suo metodo e modo di ragionare.

Vogliamo trovare l'area della semiparabola positiva $y = x^2$ tra $x = 0$ ed $x = x_0$, lo facciamo calcolando l'area sottesa tra la parabola e l'asse x (quella che Wallis nel suo scritto chiama "*complementum semi-parabola*") e poi sottraendo il valore ottenuto all'area del rettangolo.



Wallis non parla mai in termini di "conti diretti" ma ragiona sempre per proporzioni e rapporti: invece di calcolare direttamente l'area sottesa dalla parabola calcola il rapporto tra tale area e quella del rettangolo, ovvero

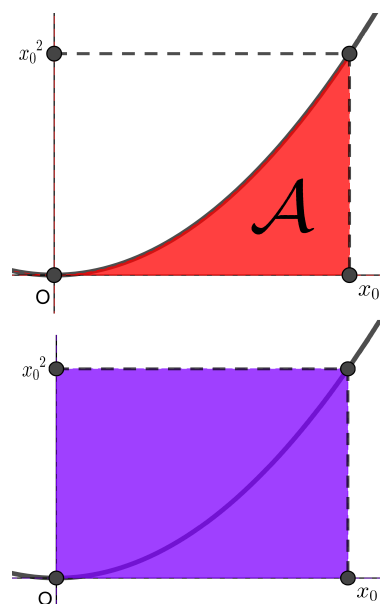
detta $\mathcal{A}$ l'area sottesa dalla parabola (in rosso in figura) ed $(x_0 y_0)$ l'area del rettangolo $[0, x_0] \times [0, x_0^2]$ (in viola in figura),

Wallis calcola la quantità $\frac{\mathcal{A}}{(x_0 y_0)}$.

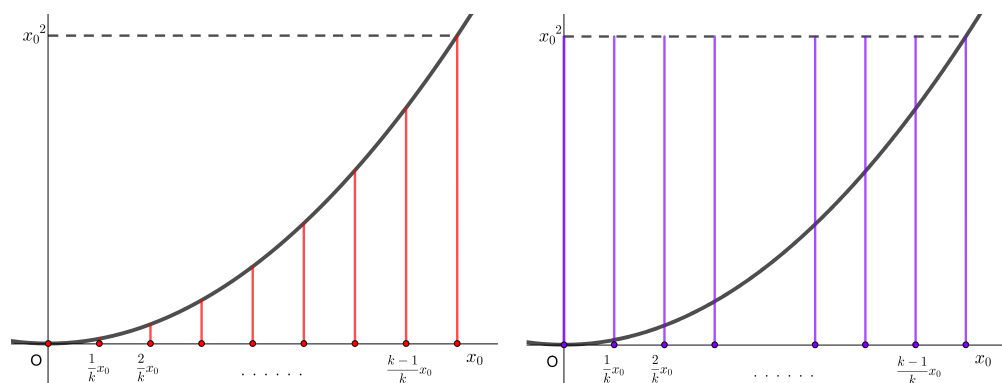
Volendo usare il metodo degli indivisibili, consideriamo entrambe le aree come la somma delle lunghezze dei segmenti verticali dai quali sono composte. I segmenti che consideriamo sono i seguenti:

dividiamo l'intervallo $[0, x_0]$ in k sottointervalli di uguale ampiezza, ovvero creiamo la sua partizione

$$\left[0, \frac{1}{k}x_0\right], \left(\frac{1}{k}x_0, \frac{2}{k}x_0\right], \dots, \left(\frac{k-2}{k}x_0, \frac{k-1}{k}x_0\right], \left(\frac{k-1}{k}x_0, x_0\right],$$



successivamente da ogni estremo degli intervalli della partizione tracciamo i segmenti verticali come nella seguente figura



allora la somma delle misure dei $k + 1$ segmenti che compongono l'area sottesa divisa per la somma dei $k + 1$ segmenti che compongono l'area del rettangolo sono un'approssimazione di $\frac{\mathcal{A}}{(x_0 y_0)}$, chiamiamo $\mathcal{R}_k$ questo rapporto. Abbiamo dunque che

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_k &= \frac{(0)^2 + \left(\frac{1}{k}x_0\right)^2 + \left(\frac{2}{k}x_0\right)^2 + \dots + \left(\frac{k-1}{k}x_0\right)^2 + (x_0)^2}{x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 + \dots + x_0^2 + x_0^2} \\ &= \frac{\frac{x_0^2}{k^2} (0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2)}{x_0^2 (1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1)} \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}{k^2 (k+1)}\end{aligned}$$

è un'approssimazione sempre migliore di $\frac{\mathcal{A}}{(x_0 y_0)}$ man mano che consideriamo k sempre più grandi.

Calcoliamo $\mathcal{R}_k$ per qualche k e facciamo delle considerazioni:

$$\text{per } k = 1, \quad \mathcal{R}_1 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\text{per } k = 2, \quad \mathcal{R}_2 = \frac{1^2 + 2^2}{2^2 \cdot 3} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\text{per } k = 3, \quad \mathcal{R}_3 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 \cdot 4} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

$$\text{per } k = 4, \quad \mathcal{R}_4 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4^2 \cdot 5} = \frac{30}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

.....

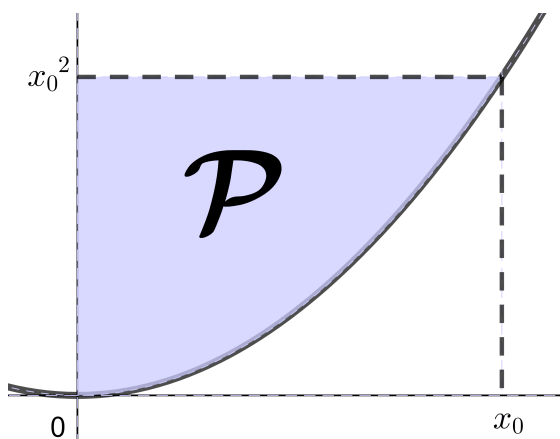
per k molto grande (Wallis dice "continuando fino ad ∞ ") $\mathcal{R}_k$ si avvicina ad $\frac{1}{3}$ poiché l'altra frazione diventa progressivamente più piccola al crescere di k (Wallis chiama "induzione" questo metodo di estendere uno schema logico e subì molte critiche a causa di esso).

Quindi possiamo dire che per k molto grande

$$\frac{\mathcal{A}}{(x_0 y_0)} = \mathcal{R}_k = \frac{1}{3}$$

o, come dice Wallis, "il completamento della semiparabola sta al parallelogrammo come 1 sta a 3".

Wallis conclude poi dicendo che di conseguenza (per differenza) "la semiparabola sta al parallelogrammo come 2 sta a 3", ovvero



$$\frac{\mathcal{P}}{(x_0 y_0)} = \frac{2}{3}.$$

Wallis si ferma al rapporto tra le due aree, ma noi possiamo andare oltre facendo una piccola osservazione: l'area del rettangolo è

$$(x_0 y_0) = x_0 \cdot y_0 = x_0 \cdot x_0^2 = x_0^3$$

di conseguenza l'area del segmento parabolico sarà

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} x_0^3.$$

In ultimo osserviamo solamente che il rapporto

$$\frac{\mathcal{A}}{(x_0 y_0)} = \frac{1}{3},$$

può essere riscritto, in virtù del fatto che l'area del rettangolo è $(x_0 y_0) = x_0^3$, come

$$\frac{\mathcal{A}}{x_0^3} = \frac{1}{3},$$

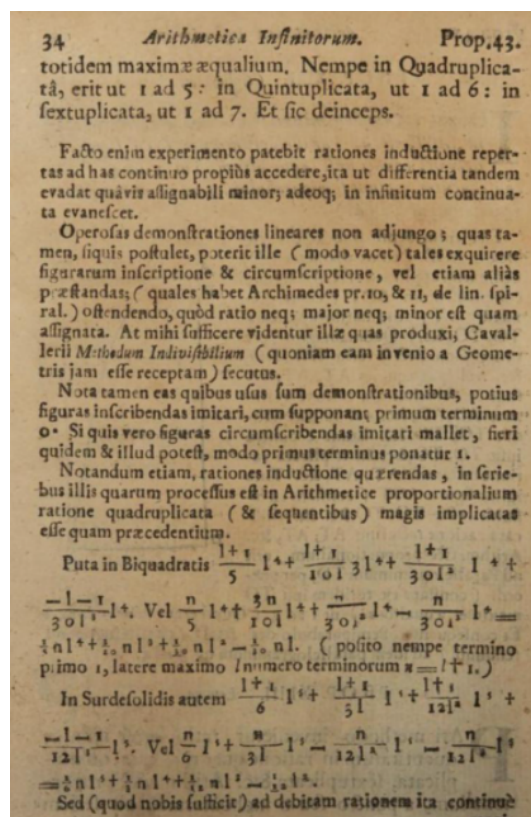
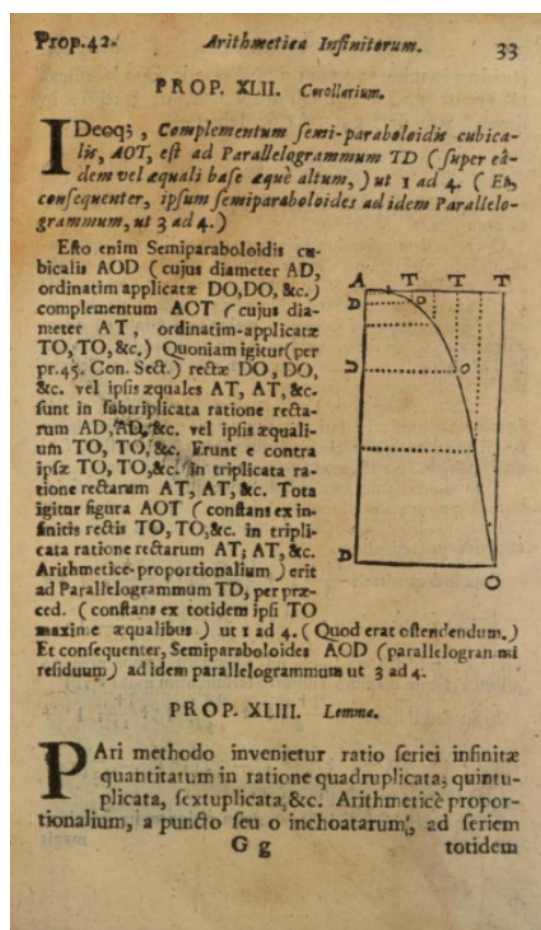
che in termini moderni diventa

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3} x_0^3 = \int_0^{x_0} x^2 dx.$$

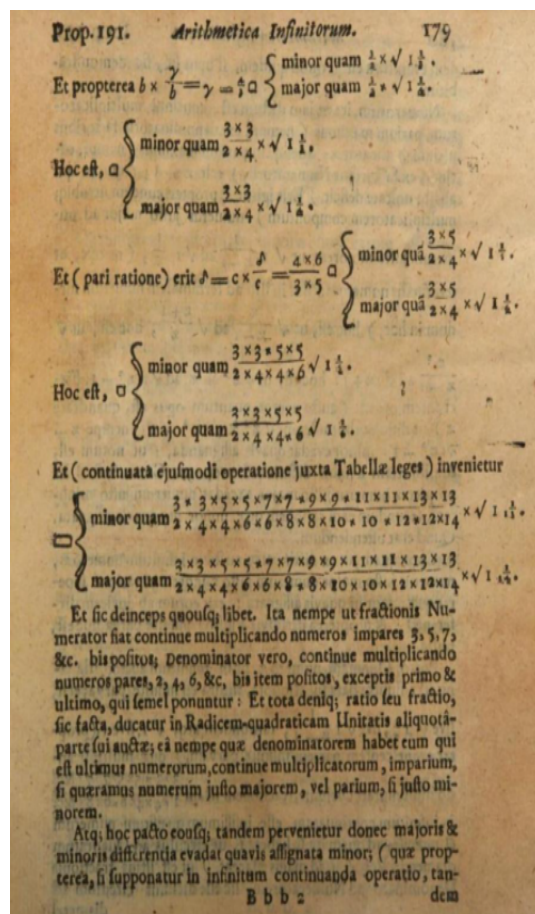
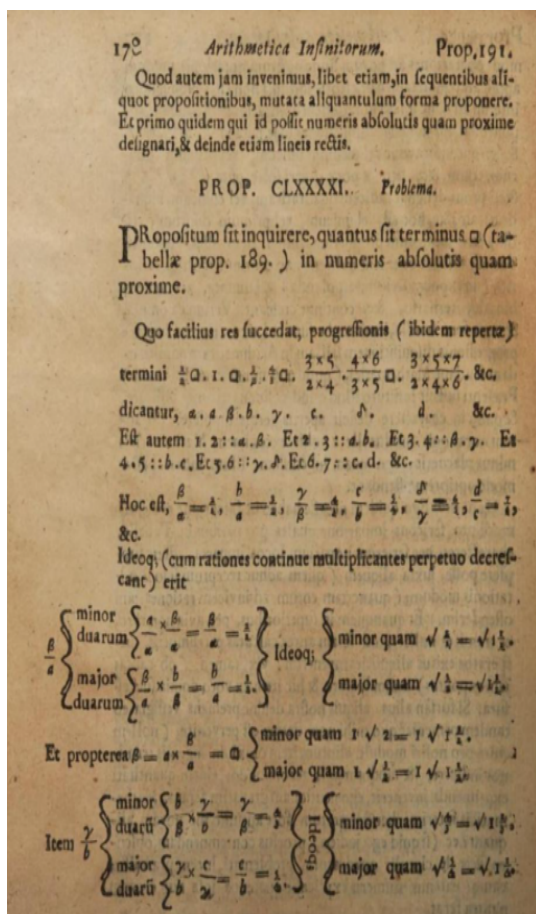
Per concludere, possiamo notare che il suo metodo si basa su una stima di somme, precisamente sull'approssimazione

$$\sum_{a=0}^A a^k \approx \frac{A^{k+1}}{k+1} \left(= \int_0^A a^k da \right).$$

Dopo aver quadrato la parabola, nelle pagine successiva Wallis procede in modo del tutto analogo per quadrare i "paraboloidi", a partire dalla cosiddetta "parabola cubica" $y = x^3$.



Successivamente, sempre procedendo mediante stime di somme, passerà alla quadratura dei "paraboloidi" con n intero negativo ed n frazionario.



Prima parte della *proposizione CLXXXI* (191) di *Arithmetica infinitorum*. In questa proposizione Wallis trova sostanzialmente la formula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \dots$$

mentre sta cercando di quadrare una circonferenza. Il simbolo " $\square$ " indica la quantità $\frac{2}{\pi}$, che altro non è che il rapporto tra l'area di un quadrato e l'area del cerchio a lui circoscritto.

Notare che nella seconda pagina compaiono le stime

$$\square \begin{cases} \text{è minore di } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{2}} \\ \text{è maggiore di } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\square \begin{cases} \text{è minore di } \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{3}} \\ \text{è maggiore di } \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{4}} \end{cases}$$

.....

$$\square \begin{cases} \text{è minore di } \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 14} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{13}} \\ \text{è maggiore di } \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 14} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{14}} \end{cases}$$

che sono stime di partenza per il risultato cercato.

Bibliografia

- [1] Antoni Malet, Marco Panza, *Wallis on Indivisible*, 2015.
- [2] C.J. Scriba, *The autobiography of John Wallis, F.R.S.*, Notes and Records Roy. Soc. London, vol. 25, 1970.
- [3] Emilia Florio, Alcune riflessioni sulle coniche (Laboratorio), <http://dmi.unife.it/it/ricerca-dmi/gruppi-di-ricerca-1/mathesis/liceo-matematico/convegno-matematica-e-storia-nel-liceo-matematico-2/registrazione-e-presentazione-degli-interventi/florio>.
- [4] John Wallis, *Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilinearum quadraturam, aliaq; difficiliora matheseos problemata*, Leon: Lichfield Academiae Typographi, Oxford, 1656.
- [5] John Wallis, *De sectionibus conicis, nova methodo expositis, tractatus*, Leon: Lichfield Academiae Typographi, Oxford, 1655.
- [6] John Wallis, *Opera Mathematica. Volumen Primum*, Theatro Sheldoniano, Oxford, 1695.
- [7] Luigi Maierù, *John Wallis. Una vita per un progetto*, Rubbettino Editore, 2007.
- [8] MacTutor, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wallis/>.